Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte et **les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

Tournez la page S.V.P

Premier exercice.

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$2xy\sqrt{3} - 2y^2 = 3$$

1. Ecrire la matrice Q associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.
3. Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$ ainsi qu'un repère orthonormé <u>direct</u> $\mathcal{R}'$ dans lequel cette équation est obtenue.
4. Donner la nature de $\mathcal{C}$
5. Déterminer les principaux éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles).
   Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère $\mathcal{R}'$ puis dans le repère $\mathcal{R}$
6. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.
   On mettra en évidence le repère $\mathcal{R}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la question 5.
   Unité : 2cm.

Deuxième exercice.

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1\,;\,+\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x+1)\,y + (2-x)\,y' - \frac{x}{2}(3x^2+2x-2)\,y'' = 3(x^2+x+1) \qquad (E)$$

On note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x+1)\,y + (2-x)\,y' - \frac{x}{2}(3x^2+2x-2)\,y'' = 0 \qquad (E_H)$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1\,;\,+\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (E_H) sur $]1\,;\,+\infty[$.

Partie I

1. Démontrer que $\forall x \in\,]1\,;\,+\infty[,\ 3x^2+2x-2 \neq 0$.
2. Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1\,;\,+\infty[$.
3. Donner, sans démonstration, la dimension de S_H.
4. Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $\forall x \in\,]1\,;\,+\infty[,\ f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ est solution de (E_H) sur $]1\,;\,+\infty[$.

Partie II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.

5. La matrice A est-elle inversible ?
6. Déterminer le noyau de A.
7. Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x = y + 2z$.
8. Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :

$$\mathcal{S}_1 : AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_2 : AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Résoudre le système $\mathcal{S}_2 : AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B} = (1,\ X,\ X^2)$.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (3X+1)\,P + (2-X)\,P' - \frac{X}{2}(3X^2+2X-2)\,P''.$$

10. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(X)$, $\varphi(X^2)$.
11. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
12. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
13. En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation

$$\varphi(P) = 3(X^2+X+1).$$

Partie IV

14. Déterminer S_H puis S.

Troisième exercice.

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

On considère la surface S d'équation cartésienne : $x^2 = 2yz$.

On note Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{array}\right. ,\ t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[.$$

De plus, $M(t)$ désigne le point de Γ de paramètre t.

Enfin, P_a est le plan d'équation $z = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$.

1. (a) Justifier que le plan d'équation $x = 0$ est un plan de symétrie de la surface S.
   (b) Déterminer les points non réguliers de S.
   (c) Déterminer une équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $(2,\,-2,\,-1)$ après avoir vérifié que $A \in S$.
   (d) Démontrer que l'ensemble des points (réguliers) de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}\,x + 2\,y + 3\,z = 0$ est une droite privée de O dont on donnera un vecteur directeur.
   (e) Existe-t-il un point régulier de S en lequel le plan tangent à S est orthogonal au vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$?
2. Démontrer que la courbe Γ est régulière.
3. Vérifier que $\Gamma \subset S$.
4. Soit $t \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Pour quelle valeur de a (dépendante de t), a-t-on $M(t) \in \Gamma_a$?
   Dans la suite de cette question, a prend cette valeur.
   (b) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}(t)$ de la tangente à Γ en $M(t)$.
   (c) Vérifier que $M(t)$ est un point régulier de Γ_a et déterminer un vecteur $\vec{u}(t)$ directeur de la tangente à Γ_a en $M(t)$.
   (d) Démontrer que $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.

Partie II

On considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On suppose que : $\forall t \in I$, $(f(t), g(t)) \in U$ et $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t), g(t)),\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t), g(t))\right) \neq (0,\, 0)$.

On note Σ la surface d'équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$ et Γ la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = \Phi(t) \end{cases}$, $t \in I$ où $\Phi(t) = \varphi(f(t), g(t))$.

On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t et on suppose f, g et φ choisies telles que la courbe Γ soit régulière.

Enfin, on admet que $\Gamma \subset \Sigma$.

1. Soit $t \in I$ fixé.
   On note P_t le plan d'équation $z = \Phi(t)$ et $\Lambda_t = \Sigma \cap P_t$.
   (a) On considère un point régulier A de Λ_t de coordonnées $(x_0,\, y_0,\, z_0)$.
   Déterminer un vecteur tangent à Λ_t au point A.
   (b) En déduire un vecteur tangent $\vec{u}(t)$ à Λ_t au point $M(t)$.
   (c) Déterminer un vecteur tangent $\vec{v}(t)$ à Γ au point $M(t)$.
   On donnera son expression d'abord à l'aide des fonctions f, g et Φ puis à l'aide des fonctions f, g et φ.
   (d) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux si et seulement si la relation suivante, notée $(\mathcal{R})$ est vérifiée :

$$f'(t)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t),\, g(t)) \;-\; g'(t)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t),\, g(t)) = 0. \qquad (\mathcal{R})$$

Dans la suite de cette partie, on pose $U = \mathbb{R}^2$ et φ est la fonction $(x,\, y) \mapsto h(x^2 + y^2)$ où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose de plus que g ne s'annule pas sur I.

On note Q_α le plan d'équation $z = \alpha$ et $\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha$.

2. (a) Justifier que la fonction h est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Justifier que pour tout $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $h(t_0) = \alpha$.
   Qu'en est-il si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$?
   (c) En déduire que pour tout $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$, Λ'_α est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   Qu'en est-il si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$?
   (d) Justifier que Σ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.
3. Démontrer que la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout t dans I si et seulement si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est constante sur I.

On suppose désormais que la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout $t \in I$.

4. En déduire que Γ est incluse dans un plan dont une équation est de la forme :

$$x + \lambda\, y = 0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. (a) Rappeler la définition d'une méridienne d'une surface de révolution.
   (b) En déduire que la courbe Γ est incluse dans une méridienne de Σ.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1001 – D'après documents fournis