BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Problème d'algèbre linéaire

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $Tr(A)$ sa trace. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite <u>antisymétrique</u> si $A^T = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Partie I

On considère dans cette partie uniquement la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. En déduire que $A^2 + I$ n'est pas inversible.
2. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont 0, i, et $-i$.
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
4. Montrer que A est semblable à la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II

Dans cette partie, on munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute matrice $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   avec $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$.
5. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que A soit la matrice de l'application $v \longmapsto w \wedge v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit r une rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'angle différent de π (modulo 2π) et soit R sa matrice dans la base canonique.

(a) Montrer que $R - R^{-1} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit w l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $R - R^{-1}$ soit la matrice de l'application $u : v \longmapsto w \wedge v$ dans la base canonique. Montrer que $w \neq 0$.

(c) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $r(v) = v$. Montrer que $u(v) = 0$.
En déduire que l'axe de la rotation r est dirigé par w.

(d) On suppose que l'axe de la rotation r est orienté selon w et soit $\theta \in [0, 2\pi[$ une mesure de l'angle de r. On pose $e_3 = \dfrac{w}{\|w\|}$ et on considère une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3).

i. Ecrire les matrices de r et de r^{-1} dans cette base.

ii. Ecrire la matrice de u dans cette base.

iii. En déduire que $\sin\theta > 0$ puis que

$$\theta = \arccos\left(\frac{Tr(R) - 1}{2}\right).$$

(e) Idendifier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Partie III

On se fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a :
$$X^T B X = X^T B^T X.$$
En déduire que $X^T A X = 0$.

2. Soit une matrice colonne X telle que $(A + I)X = 0$. En calculant $X^T(A + I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.

3. En déduire que $A + I$ est inversible.

4. Montrer que la matrice $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ est orthogonale.

5. Calculer $(I + B)(I + A)$. En déduire que $I + B$ est inversible.

6. Réciproquement, soit B une matrice orthogonale telle $I + B$ soit inversible. On considère la matrice $C = (I + B)^{-1}(I - B)$. Montrer que l'on a
$$C^T = I - B^{-1} - C^T B^{-1}$$
puis que la matrice C est antisymétrique.

Tournez la page S.V.P.

Partie IV

On se fixe dans cette partie un entier naturel non n ul n et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

1. Soit X une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$. Montrer que $Y^T Y = 0$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n = Imf \oplus Kerf$.
3. En déduire que A est semblable à une matrice bloc de la forme
$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
où C est une matrice inversible.
4. Soit λ une valeur propre complexe de A associée au vecteur propre X.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$ le vecteur composé des nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur X.
En calculant de deux façons différentes $\overline{X}^T AX$, montrer que λ est imaginaire pur.
5. Soit λ un nombre complexe non nul. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de C.
6. En déduire que C est d'ordre pair.

Exercice de Probabilités

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que
$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}$$
où α est une constante réelle.

1. Déterminer la valeur de α.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, nous avons
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $Var(X)$, $Cov(X, Y)$.
5. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geq n)$.

6. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.

7. Calculer les probablités suivantes:

$$\mathbb{P}(X = Y), \qquad \mathbb{P}(X < Y), \qquad \mathbb{P}(X = rY)$$

   où r est un nombre rationnel positif fixé.

8. On pose $T = X - Y$. Déterminer la loi du couple (Z, T) en précisant dans un premier temps les valeurs possibles prises par ce couple.
   Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

9. Calculer la loi conditionnelle de Z sachant $X = k$.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1092 – D'après documents fournis