Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Les parties I, II, et III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soient b et c deux réels. On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$$

1. On suppose, dans cette question, que : $b^2 - 4\,c > 0$.
   (a) Donner les racines r_1 et r_2 du trinôme $r^2 + b\,r + c$, et rappeler les relations coefficients-racines (qui permettent d'exprimer en fonction de b et c : $r_1 + r_2$ et $r_1\,r_2$).
   (b) Montrer que toute fonction de la forme $t \mapsto e^{r_i\,t}$, $i \in \{1,2\}$, est solution de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Vérifier que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:
   $$\left(y' - r_1\,y\right)' - r_2\,\left(y' - r_1\,y\right) = 0$$
   (d) Montrer qu'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que, pour toute solution y de $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ sur $\mathbb{R}$:
   $$y'(t) - r_1\,y(t) = C_2\,e^{r_2\,t} \quad , \quad y'(t) - r_2\,y(t) = C_1\,e^{r_1\,t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
   (e) En déduire que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ est de la forme :
   $$t \mapsto \lambda\,e^{r_1\,t} + \mu\,e^{r_2\,t} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
   (f) *Etude d'un cas particulier :* $b = 0$, $c = -16$.
      i. Donner l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ dans ce cas particulier.
      ii. On adjoint à l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ les conditions initiales :
      $$y(0) = 2\,e \quad , \quad y'(0) = 0$$
      Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ admet alors l'équation différentielle homogène $(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$? On demande d'expliciter ces solutions.

2. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles :
   $$(2\,x - y^2)\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 16\,\varphi = 0 \quad (E)$$
   sur le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2 < 2\,x\right\}$.

   (a) Représenter D. On admettra qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit $\Delta = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout (u,v) de Δ, associe : $h(u,v) = \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, v\right)$. Justifier, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.

(c) Montrer que la fonction φ, de classe C^2 sur D, est solution de (E) sur D si et seulement si la fonction ψ, définie, pour tout (u,v) de Δ, par : $\psi(u,v) = (\varphi \circ h)(u,v)$, est solution sur Δ de (E') :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 16\,\psi = 0$$

(d) Déterminer toutes les solutions de (E') sur Δ.

Partie II

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2\,\lambda\, x + \mu)^{n+1}}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x : $x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right)$.
2. Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de I_n. Que vaut I_0 ?
3. On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \dfrac{(2\,n-1)\,I_{n-1}}{2\,n}$.
   (On pourra intégrer par parties.)

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de l'entier n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

Partie III

1. Soit x un réel tel que : $|x| \leq \dfrac{1}{4}$. Exprimer, en fonction de x, les deux solutions $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ de l'équation :

$$\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} + x = 0$$

2. Donner le domaine de définition $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$ de la fonction f qui, à tout réel x de $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}$, associe :

$$\frac{1-\sqrt{1-4\,x}}{2}$$

Tournez la page S.V.P.

3. Pour tout réel non nul α, rappeler le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x de $]-1,1[$, associe $(1+x)^\alpha$.
4. Donner le développement en série entière de la fonction f, en l'écrivant sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n\, x^n \quad , \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_S$$

où $\mathcal{D}_S$ est un domaine de $\mathbb{R}$ à préciser. On donnera la valeur de S_0, et on exprimera les coefficients S_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, en fonction de n, sous forme de produit.
5. Rappeler la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série produit ?
6. A l'aide de la question II.1, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\, S_{n-k} \qquad (\star)$$

7. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 2\,n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} 2\,n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}$ est le coefficient binomial « $n-1$ parmi $2\,n-2$ ».
8. Etudier la convergence de la série de terme général S_n.
9. On appelle « mot de Dyck » une chaîne de $2\,n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^\star$, formée de n lettres A et n lettres B, telle que, lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de A soit toujours supérieur ou égal au nombre de B. Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : AB. Les mots de Dyck de longueur 4 sont : $AABB$ et $ABAB$. $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck, alors que BA ou $AABBBA$ n'en sont pas.

   Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par C_n le nombre de mots de Dyck de $2\,n$ lettres.

   (a) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4.

   (b) On pose : $C_0 = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k}$.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = S_{n+1}$, et conclure.

La première partie présente une méthode originale montrant que toute solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est nécessairement d'une forme donnée, sans recourir aux démonstrations classiques habituellement basées sur du calcul matriciel.

La seconde partie étudie la convergence d'intégrales généralisées.

La troisième partie développe des résultats liés aux nombres de Catalan d'ordre n, S_{n+1} ou C_n ($n \in \mathbb{N}$), qui sont couramment utilisés en modélisation numérique (éléments finis). Le domaine géométrique auquel on s'intéresse est discrétisé et peut être approché par une surface polygonale par morceaux. Pour obtenir une bonne approximation géométrique, on divise chaque polygone en triangles. Le nombre de configurations possibles pour trianguler un polygone convexe à $n+2$ sommets est donné par le nombre de Catalan d'ordre n.