Exercices types
Algorithmique et simulation numérique
Oral Mathématiques et algorithmique
Banque PT

Ces exercices portent sur les items 2, 3 et 5 du programme d'informatique des classes préparatoires, filière scientifique :

- algorithmique (items 2 et 5) avec l'utilisation du langage Python ;
- ingénierie numérique et simulation (item 3) avec l'utilisation de l'environnement de simulation numérique (bibliothèques Numpy/Scipy/Matplotlib de Python ou atelier logiciel Scilab).

Ils peuvent être de longueur et de difficulté inégales. L'examinateur saura, bien sûr, adapter sa notation selon le sujet.

Lors de l'épreuve, un formulaire sera mis à disposition du candidat, sous forme de feuilles à côté de l'ordinateur. Ce formulaire est fourni ici au format PDF : `MementoPythonScilab_BanquePT_mai15.pdf`.

Exercice 0

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

---

1. Soit l'entier `n = 1234`. Quel est le quotient, noté `q`, dans la division euclidienne de `n` par 10 ? Quel est le reste ? Que se passe-t-il si on recommence la division par 10 à partir de `q` ?
2. Écrire la suite d'instructions calculant la somme des cubes des chiffres de l'entier 1234.
3. Écrire une fonction `somcube`, d'argument `n`, renvoyant la somme des cubes des chiffres du nombre entier `n`.
4. Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 1000 égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
5. En modifiant les instructions de la fonction `somcube`, écrire une fonction `somcube2` qui convertit l'entier `n` en une chaîne de caractères permettant ainsi la récupération de ses chiffres sous forme de caractères. Cette nouvelle fonction renvoie toujours la somme des cubes des chiffres de l'entier `n`.

Exercice 1

Cet exercice pourra être fait avec le langage Python (et ses bibliothèques numpy, scipy, matplotlib) ou avec le logiciel Scilab. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction donnée par des points dont les coordonnées sont situées dans un fichier.

1. Le fichier `"ex_001.csv"`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient une quinzaine de lignes selon le modèle suivant :

   ```
   0.0;1.00988282142
   0.1;1.07221264497
   ```

   Chaque ligne contient deux valeurs flottantes séparées par un point-virgule, représentant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point. Les points sont ordonnés par abscisses croissantes.

   Ouvrir le fichier en lecture, le lire et construire la liste `LX` des abscisses et la liste `LY` des ordonnées contenues dans ce fichier.

2. Représenter les points sur une figure.

3. Les points précédents sont situés sur la courbe représentative d'une fonction f. On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale I de cette fonction sur le segment où elle est définie.

   Écrire une fonction `trapeze`, d'arguments deux listes `y` et `x` de même longueur `n`, renvoyant :

   $$\sum_{i=1}^{n-1} (\mathtt{x}_i - \mathtt{x}_{i-1}) \, \frac{\mathtt{y}_i + \mathtt{y}_{i-1}}{2} \, .$$

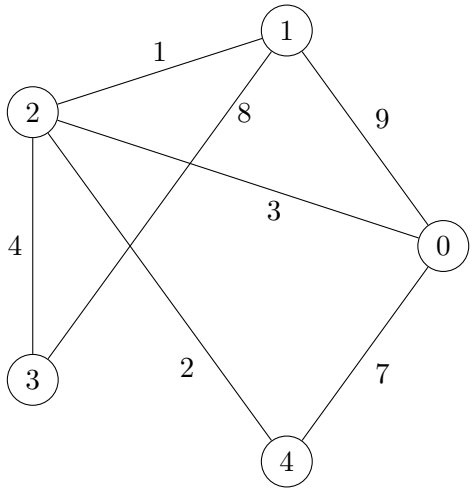
   `trapeze(LY,LX)` renvoie donc une valeur approchée de l'intégrale I par la méthode des trapèzes.

4. *En utilisant la méthode d'intégration numérique* `trapz` *de la sous-bibliothèque* `scipy.integrate` *du langage Python ou la méthode* `inttrap` *du logiciel Scilab*, retrouver la valeur approchée de l'intégrale I.

Exercice 2

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

On considère le graphe `G` suivant, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière :



1. Construire la matrice $(\texttt{M}_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant 4}$, *matrice de distances* du graphe `G`, définie par :

   pour tous les indices i, j, $\texttt{M}_{ij}$ représente la distance entre les sommets i et j,
   ou encore la longueur de l'arête reliant les sommets i et j.

   On convient que, lorsque les sommets ne sont pas reliés, cette distance vaut -1. La distance du sommet i à lui-même est, bien sûr, égale à 0.
2. Écrire une suite d'instructions permettant de dresser à partir de la matrice `M` la liste des voisins du sommet 4.
3. Écrire une fonction `voisins`, d'argument un sommet i, renvoyant la liste des voisins du sommet i.
4. Écrire une fonction `degre`, d'argument un sommet i, renvoyant le nombre des voisins du sommet i, c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de i.
5. Écrire une fonction `longueur`, d'argument une liste `L` de sommets de `G`, renvoyant la longueur du trajet décrit par cette liste `L`, c'est-à-dire la somme des longueurs des arêtes empruntées. Si le trajet n'est pas possible, la fonction renverra -1.

Exercice 3

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

Soit un entier naturel n non nul et une liste `t` de longueur n dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cet exercice est de trouver le nombre maximal de 0 contigus dans `t` (c'est-à-dire figurant dans des cases consécutives). Par exemple, le nombre maximal de zéros contigus de la liste `t1` suivante vaut 4 :

`i`	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
`t1[i]`	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0

1. Écrire une fonction `nombreZeros(t,i)`, prenant en paramètres une liste `t`, de longueur n, et un indice i compris entre 0 et $n-1$, et renvoyant :

   $$\begin{cases} 0, \text{ si } \texttt{t}[i]=1 \\ \text{le nombre de zéros consécutifs dans } \texttt{t} \text{ à partir de } \texttt{t}[i] \text{ inclus, si } \texttt{t}[i]=0 \end{cases}$$

   Par exemple, les appels `nombreZeros(t1,4)`, `nombreZeros(t1,1)` et `nombreZeros(t1,8)` renvoient respectivement les valeurs 3, 0 et 1.
2. Comment obtenir le nombre maximal de zéros contigus d'une liste `t` connaissant la liste des `nombreZeros(t,i)` pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$?

   En déduire une fonction `nombreZerosMax(t)`, de paramètre `t`, renvoyant le nombre maximal de 0 contigus d'une liste `t` non vide. On utilisera la fonction `nombreZeros`.
3. Quelle est la complexité de la fonction `nombreZerosMax` construite à la question précédente ?
4. Trouver un moyen simple, toujours en utilisant la fonction `nombreZeros`, d'obtenir un algorithme plus performant.

Exercice 4

Cet exercice pourra être fait avec le langage Python (et ses bibliothèques numpy, scipy, matplotlib) ou avec le logiciel Scilab. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

Soient n un entier naturel strictement positif et p un réel compris entre 0 et 1.
On considère X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé donné. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ et Y suit une loi binomiale de paramètres (n, p).

1. Définir une fonction `Px`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(X = k)$.
   $k!$ (*factorielle* k) *s'obtient par* `factorial(k)` *en Python* (*bibliothèque* `math`) *et* `prod(1 : k)` *en Scilab.*
   Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0.1$, la liste des valeurs de $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 30$.
2. Définir une fonction `Py`, d'arguments k, n et p, renvoyant la valeur de $P(Y = k)$.
   On pourra utiliser `comb` *de la sous-bibliothèque* `scipy.misc` *en Python et* `binomial` *en Scilab.*
   Déterminer, pour $n = 30$ et $p = 0.1$, la liste des valeurs de $P(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 30$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que, sous certaines conditions sur n et p, la probabilité $P(Y = k)$ peut être approchée par $P(X = k)$. Déterminer une fonction `Ecart` d'arguments n et p, renvoyant le plus grand des nombres $|P(Y = k) - P(X = k)|$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
4. Soit e un réel strictement positif. Déterminer une fonction `N`, d'arguments e et p, renvoyant le plus petit entier n tel que `Ecart`(n, p) soit inférieur ou égal à e.
5. Faire l'application numérique dans les quatre cas suivants :
   - $p = 0.075$ avec $e = 0.008$ et $e = 0.005$.
   - $p = 0.1$ avec $e = 0.008$ et $e = 0.005$. Interpréter le dernier résultat.

Exercice 5

Cet exercice pourra être fait avec le langage Python (et ses bibliothèques numpy, scipy, matplotlib) ou avec le logiciel Scilab. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

On considère la fonction g définie sur $[0\,,2[$ par

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

1. Définir la fonction g. Tracer sa courbe représentative sur $[0\,,2[$, c'est-à-dire la ligne brisée reliant les points $(x, g(x))$ pour x variant de 0 à 1.99 avec un pas de 0.01.
2. Définir une fonction f donnée de manière récursive sur $[0\,,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } 0 \leqslant x < 2 \\ \sqrt{x}\, f(x-2) & \text{pour } x \geqslant 2. \end{cases}$$

3. Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,,6]$.
4. Écrire les instructions permettant de calculer, à 10^{-2} près, la plus petite valeur $\alpha > 0$ telle que $f(\alpha) > 4$.

Exercice 6

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

---

1. On considère le code Python de la fonction `d` suivante :

```
def d(n):
    L=[1]
    for nombre in range(2,n+1):
        if n%nombre==0:
            L.append(nombre)
    return L
```

   Quel est le résultat de l'appel `d(4)` ? Puis de l'appel `d(10)` ?

   Que fait la fonction `d` ?

2. Un *diviseur non-trivial* d'un entier `n` est un diviseur de `n` différent de `1` et de `n`. Écrire une fonction `DNT`, d'argument `n`, renvoyant la liste des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
3. Écrire une fonction `sommeCarresDNT`, d'argument `n`, renvoyant la somme des carrés des diviseurs non-triviaux de l'entier `n`.
4. Écrire la suite des instructions permettant d'afficher tous les nombres entiers inférieurs à 1000 et égaux à la somme des carrés de leurs diviseurs non-triviaux. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 7

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

Soit `n` un entier vérifiant $\texttt{n} \leqslant 26$. On souhaite écrire un programme qui code un mot en décalant chaque lettre de l'alphabet de `n` lettres.
Par exemple pour $n = 3$, le décalage sera le suivant :

avant décalage	a	b	c	d	...	...	x	y	z
après décalage	d	e	f	g	...	...	a	b	c

Le mot `oralensam` devient ainsi `rudohqvdp`.

1. Définir une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique (caractères en minuscule).
2. Écrire une fonction `decalage`, d'argument un entier `n`, renvoyant une chaîne de caractères contenant toutes les lettres dans l'ordre alphabétique, décalées de `n`, comme indiqué ci-dessus.
3. Écrire une fonction `indices`, d'arguments un caractère `x` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant une liste contenant les indices de `x` dans `phrase` si `x` est une lettre de `phrase` et une liste vide sinon.
4. Écrire une fonction `codage` d'arguments un entier `n` et une chaîne de caractères `phrase`, renvoyant `phrase` codé avec un décalage de `n` lettres.
5. Comment peut-on décoder un mot codé ?

Exercice 8

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

On pose $M = 20$ et $m = 10$.
À un nombre c quelconque, on associe la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + c \ \text{ pour } n \geqslant 0.$$

S'il existe, on note k le plus petit entier tel que l'on ait $0 \leqslant k \leqslant m$ et $|u_k| > M$.
On définit alors la fonction f par

$$f : c \mapsto \begin{cases} k & \text{s'il existe} \\ m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le code définissant la fonction f.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f sur $[-2;2]$, en créant une liste `LX` de 401 valeurs équiréparties entre -2 et 2 inclus et *en utilisant les fonctions* `plot` *et* `show` *de la sous-bibliothèque* `matplotlib.pyplot`.
3. Construire le tableau des valeurs $f(x+\mathtt{i}\,y)$ où x prend 101 valeurs comprises entre -2 et 0.5 et y prend 101 valeurs entre -1.1 et 1.1. *On rappelle que le nombre complexe* `i` *est représenté par* `1j`. *Par exemple, le complexe* $1 + 2\,\mathtt{i}$ *est représenté par* `1+2j`.
4. Tracer l'image que code ce tableau. *On pourra utiliser les fonctions* `imshow` *et* `show` *de la sous-bibliothèque* `matplotlib.pyplot`.
   Quels paramètres peut-on modifier pour obtenir une meilleure résolution ?

Exercice 9

Cet exercice pourra être fait avec le langage Python (et ses bibliothèques numpy, scipy, matplotlib) ou avec le logiciel Scilab. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

Dans cet exercice, avec Python on pourra utiliser la fonction `array` *de la bibliothèque* `numpy`, *ainsi que la fonction* `eig` *de la sous-bibliothèque* `numpy.linalg`. *Avec Scilab, on utilisera* `spec`.

1. Créer deux matrices $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et les faire afficher.
2. Créer une fonction `test`, d'argument M, renvoyant la valeur `n` si M est une matrice carrée d'ordre `n` (entier naturel non nul), et zéro dans tous les autres cas.
   Vérifier la fonction `test` sur R et sur S.
3. Le fichier `ex_006.txt`, situé dans le sous-répertoire `data` du répertoire de travail, contient un tableau de valeurs flottantes. Lire ce tableau dans le fichier et vérifier qu'il correspond bien à une matrice carrée d'ordre 5 que l'on désignera par `M1`.
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice `M1`.
5. Créer une fonction `dansIntervalle`, d'arguments une liste L et deux réels a et b, renvoyant la valeur `True` si tous les éléments de la liste L sont dans l'intervalle $[a, b]$ et `False` sinon.
   Vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice `M1` sont dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 10

Cet exercice devra être fait avec le langage Python. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N.

1. Écrire une fonction `comptage`, d'arguments L et N, renvoyant une liste P dont le k-ième élément désigne le nombre d'occurences de l'entier k dans la liste L.
2. Utiliser la liste P pour en déduire une fonction `tri`, d'arguments L et N, renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.
3. Tester la fonction `tri` sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ? La comparer à la complexité d'un tri par insertion ou d'un tri fusion.

Exercice 11

Cet exercice pourra être fait avec le langage Python (et ses bibliothèques numpy, scipy, matplotlib) ou avec le logiciel Scilab. À chaque question, les instructions ou les fonctions écrites devront être testées.

---

1. Deux paramètres b et w valant respectivement 0.5 et 6.0, définir trois fonctions d'une variable t renvoyant des couples :

$$\begin{cases} p : t \mapsto (\ \cos(t) + b\,\cos(w\,t) & , \sin(t) + b\,\sin(w\,t) &) \\ v : t \mapsto (\ -\sin(t) - b\,w\,\sin(w\,t) & , \cos(t) + b\,w\,\cos(w\,t) &) \\ a : t \mapsto (\ -\cos(t) - b\,w^2\,\cos(w\,t) & , -\sin(t) - b\,w^2\,\sin(w\,t) &) \end{cases}$$

   Vérifier ces fonctions sur un exemple.

   $p(t) = (x(t), y(t))$ désigne la position dans le plan d'une masse ponctuelle mobile au cours du temps, $v(t) = (x'(t), y'(t))$, sa vitesse, et $a(t) = (x''(t), y''(t))$, son accélération.
2. Construire la liste `L` des points $p(t)$, pour t variant de $-\pi$ à π avec un pas de discrétisation δt vérifiant $\delta t = 0.01\,\pi$.
3. Faire tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal la ligne polygonale reliant les points $p(t)$ de la liste `L`.
4. Définir puis tester la fonction c d'une variable t qui renvoie le couple des coordonnées du centre de courbure donné par :

$$c(t) = \big(\ x(t) - d\,y'(t)\ ,\ y(t) + d\,x'(t)\ \big)\ \text{où}\ d = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t)}\ .$$

5. Rajouter sur le graphique précédent la ligne décrite par les centres de courbure, avec la même discrétisation en temps.
6. Calculer la longueur de la ligne polygonale reliant les points $p(t)$, pour différents pas de discrétisation δt. Observer l'évolution de cette longueur lorsque δt diminue.
