Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. On considère la fonction h, impaire, 2π périodique, dont la restriction à $[0,\pi[$ est donnée par :

$$h(x) = x$$

   (a) Donner les coefficients de Fourier, notés $a_n(h)$ $(n \geq 0)$ et $b_n(h)$ $(n \geq 1)$, de la fonction h.

   (b) Rappeler le théorème de Dirichlet.

   (c) En déduire la convergence de la série de Fourier de h, et son expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Montrer que, pour tout réel x de $[0,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}$$

   (e) En déduire :

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

2. Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n} t\, dt$$

   (a) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\, dt$$

   (b) Montrer que :

$$J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\, dt$$

   (c) Rappeler les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe.

   (d) Rappeler la formule du binôme de Newton.

   (e) Calculer, pour tout entier relatif k : $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{i\,k\,t}\, dt$.

   (f) A l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t, $\cos^{2n} t$ en fonction d'exponentielles complexes.

   (g) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n} t\, dt$?

   (h) En déduire :

$$J_n = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n\, n!}\,\pi$$

Partie II

On considère les fonctions ϕ et ψ, respectivement définies par :

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt \ , \ \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,dt$$

1. Montrer que, pour tout réel t strictement positif : $\dfrac{|\sin t|}{t} \leq 1$.
2. Montrer que ϕ et ψ sont bien définies sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
3. Soit a un réel strictement positif. Etudier la continuité et la dérivabilité de ϕ et ψ sur $[a, +\infty[$.
4. Pour tout réel $x > 0$, comparer $\phi'(x)$ et $\psi(x)$.
   (On pensera à remarquer que $\psi(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_0^X \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,dt$ afin de pouvoir intégrer par parties)
5. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :
   $$\phi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$
6. Montrer que ϕ a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x)$ pour tout réel strictement positif x.
8. On admet que :
   $$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-xt}\sin t}{t} dt$$
   Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$?

Partie III

Soit $c \in [0, 1[$. On pose :

$$I(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - c^2\sin^2 t}}$$

1. Montrer que $I(c)$ est bien définie.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

(c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathcal{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).

(d) Montrer que f est solution sur $\mathcal{D}_f$ de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,f'(x) - x\,f(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_f)$$

(e) On recherche le développement en série entière de f sur $\mathcal{D}_f$ sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, x^n$$

i. Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.

ii. Pour tout entier naturel p, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.

iii. Donner le développement en série entière de f.

3. On suppose que :

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p}\, c^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)\, dt$$

En utilisant les résultats du I, en déduire l'expression de $I(c)$ sous la forme :

$$I(c) = \pi\, S$$

où S désigne la somme d'une série où les termes $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)\, dt$, $p \in \mathbb{N}$, n'apparaissent plus.

Dans ce problème, on présente diverses méthodes de calcul du nombre transcendant π. Dans la première partie, on retrouve les intégrales de Wallis, que l'on calcule sans utiliser de relation de récurrence. Dans la seconde partie, on fait apparaître l'intégrale de Dirichlet, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, qui donne le calcul de l'intégrale de la fonction sinus cardinal $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur la demi-droite des réels positifs. Les relations permettant d'exprimer π en fonction de la somme d'une série permettent son calcul approché. La série de la partie III permet un calcul approché avec une convergence quadratique, donc plus puissante.