Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

1. Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on considère les points $I(1,\,0)$, $J(0,\,1)$.

   (a) Soit $M(x,\,y)$ un point du plan. Donner l'expression de la distance $d\,(M;(OI))$ du point M à la droite (OI), puis de la distance $d\,(M;(OJ))$ du point M à la droite (OJ), et, enfin, de la distance $d\,(M;(IJ))$ du point M à la droite (IJ).

   Dans ce qui suit, on désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,\,y)$ du plan tels que la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle OIJ soit égale à $\frac{1}{3}$.

   (b) Former une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

   (c) Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$, et préciser sa nature et son excentricité.

   (d) Montrer que $\mathcal{C}$ est tangente aux droites (OI) et (OJ).

2. Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on considère les ellipses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ d'équations respectives

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1,$$

   où a et b désignent deux réels strictement positifs.

   On considère la représentation paramétrique de $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

   et les points N et P de paramètres respectifs t et θ.

   (a) Déterminer une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathcal{E}$ en P est parallèle à la droite (ON).

   (b) La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'aire du triangle NOP.

   (c) On considère la droite Δ d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
   Montrer que Δ est tangente à $\mathcal{E}$ si, et seulement si,

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2-\gamma^2=0 \quad \text{et} \quad \gamma\neq 0.$$

   (d) On désigne par u et v deux réels, soient $U(2a\cos u,\,2b\sin u)$ et $V(2a\cos v,\,2b\sin v)$ deux points distincts de l'ellipse $\mathcal{E}'$.
   Déterminer la relation que doivent vérifier u et v pour que la droite (UV) soit tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$.

   (e) Soient A, B et C trois points distincts de $\mathcal{E}'$ tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathcal{E}$.
   Montrer que (BC) est tangente à $\mathcal{E}$.

3. Les points P et Q décrivent respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tout en vérifiant l'égalité $PQ = a + b$, on considère le point M du segment $[PQ]$ tel que $MP = b$ et $MQ = a$.
   i. Rappeler la définition d'une affinité orthogonale.
   ii. Dans le cas où $a = 5$ et $b = 3$, représenter sur une figure les points M, P et Q (l'unité de longueur est 1 centimètre).
   iii. Quel est l'ensemble $(\mathcal{E})$ du plan décrit par le point M ?

Partie II

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on considère les droites D et D' d'équations respectives

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4z = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4z = 1 \end{cases}.$$

On désigne par $\mathcal{P}$ la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2.$$

1. Déterminer la nature des courbes obtenues en coupant $\mathcal{P}$ successivement par les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $z = 1$.
2. Déterminer la nature de $\mathcal{P}$.
3. Soit $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ un point de $\mathcal{P}$. Combien y-a-t-il de droites passant par M_0 entièrement incluses dans $\mathcal{P}$? On donnera un vecteur directeur de chacune de ces droites.
4. Quel est l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ par lesquels passent deux droites orthogonales et incluses dans $\mathcal{P}$?
5. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points de l'espace équidistants des droites D et D'.

Partie III

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$, à coefficients réels, et par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note tr l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

1. Montrer que tr est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{tr})$. En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.
3. Montrer que l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{vect}(I_n) \oplus \ker(\mathrm{tr})$.
4. Établir que : $\forall (A,\, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Déterminer, s'il en existe, des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.
6. J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit Ψ_J l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe

$$\Psi_J(M) = M + \operatorname{tr}(M)J.$$

   (a) Montrer que Ψ_J est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Dans le cas où $J = I_n$, déterminer les valeurs propres de Ψ_{I_n}.
   Ψ_{I_n} est-il diagonalisable ?
   (c) On revient au cas général, simplifier $(\Psi_J)^2 - 2\Psi_J + Id$ où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Quelles sont les valeurs propres de Ψ_J ?
   (e) Ψ_J est-il diagonalisable ?