# Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

## L'usage de calculatrices est interdit.

## AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

**Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.**

**Tournez la page S.V.P.**

Soient $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$ des entiers naturels non nuls. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes, à coefficients complexes, et $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à $r$ lignes et $s$ colonnes, à coefficients complexes. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$, à coefficients complexes,

## Question préliminaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général $a_{ij}$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général $b_{ij}$.
   (a) A quelle condition sur $p, q, r, s$ le produit $AB$ est-il bien défini ? Quelle est alors la taille de la matrice $AB$ ?
   (b) Sous cette condition, on note $c_{ij}$ le terme général de la matrice $AB$. Exprimer $c_{ij}$ en fonction des $a_{ij}$ et $b_{ij}$.
2. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice $A_p$.
   On dit que la suite de matrices converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si pour tous indices $i, j$, la suite complexe $(a_{ij}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{ij}$.
   (a) Montrer que si la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A$ et si la suite de matrices $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $B$, alors la suite $(A_p + B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $A + B$.
   (b) Montrer que, sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $AB$.

## Partie I

On considère la matrice carrée $A$ d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_1$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre 1.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice $A$. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ? dans $\mathbb{C}$ ?
3. On note
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}.$$
   Calculer $D^n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. On demande ici une expression explicite de la limite.

5. Déterminer l'unique vecteur ligne $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que

   - $a > 0$, $b > 0$, et $c > 0$,
   - $a + b + c = 1$,
   - $\pi A = \pi$.

## Partie II

On considère la matrice carrée $B$ d'ordre 2 suivante

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

On note $I_2$ la matrice identité d'ordre 2.

1. On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$.
   Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a+b-1)I_2)$.

2. Soit $p$ un entier strictement positif.

   (a) Justifier l'existence d'un polynôme $Q$ et de deux réels $\alpha_p$ et $\beta_p$ tels que

   $$X^p = P(X)Q(X) + \alpha_p X + \beta_p.$$

   (b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs de $X$ bien choisies, déterminer les valeurs de $\alpha_p$ et $\beta_p$.

   (c) En déduire une expression de $B^p$.

3. Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

## Partie III

Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels.
On dit que la matrice $M$ est ***stochastique*** si

- pour tout couple d'entiers naturels $(i,j)$ tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ :

  $$m_{ij} \geq 0$$

- la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire, pour tout entier $i$ tel que $1 \leq i \leq n$ :

  $$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

1. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice stochastique.
Montrer que, pour tout couple d'entiers naturels $(i, j)$ tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ :

$$m_{ij} \leq 1$$

2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que si $M$ est stochastique, alors $X_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

   (b) Réciproquement, soit $M$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients positifs. Montrer que si $X_1$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors $M$ est stochastique.

   (c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3. Soit $M$ une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1$.

   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.
   Montrer que, pour tout entier $i$ tel que $1 \leq i \leq n$ :

   $$|y_i| \leq 1$$

   (b) En déduire que si $X$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$, alors :

   $$|\lambda| \leq 1$$

   (c) Montrer que toutes les valeurs propres de $M$ sont de module inférieur à 1.

## Exercice de Géométrie

Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la surface $(S)$ d'équation paramétrique

$$\alpha yz + \beta xz + \gamma xy = 0$$

où $\alpha, \beta, \gamma$ sont des paramètres réels non tous nuls.

1. Quelle est la nature de $(S)$ pour $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ ?

2. De façon générale, quelle est la nature de $(S)$ lorsque un ou deux paramètres sont nuls ?

3. Quelle est la nature de $(S)$ lorsque $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ?

4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & -\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $A$ soit de rang 1 si et seulement si

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2.$$

(b) En déduire que $(S)$ est une surface de révolution si et seulement si $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$.

5. Donner les éléments caractéristiques de la surface $(S)$ quand $\alpha = \beta = \gamma$.