

b. Donner, pour tout réel x de $] - 1, 1 [$, l'expression de $g'_\alpha(x)$ en fonction de x .

c. Donner, pour tout réel x de $] - 1, 1 [$, l'expression de $g''_\alpha(x)$ en fonction de x .

d. Montrer que g_α est solution sur $] - 1, 1 [$ de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad (\mathcal{E})$$

e. On recherche une solution de (\mathcal{E}) développable sur $] - 1, 1 [$ en série entière sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et telle que :

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

i. Exprimer, pour tout entier naturel n , a_{n+2} en fonction de a_n .

ii. Donner, pour tout entier naturel p , la valeur de a_{2p+1} .

iii. Exprimer, pour tout entier naturel p , a_{2p} en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier le numérateur) de a_{2p} .

iv. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?

f. Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles (\mathcal{E}) admet des solutions polynomiales (dans cette question, les valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ ne sont pas fixées).

3. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.

Pour tout réel x de $] - 1, 1 [$, donner une expression simplifiée de $g_\alpha(x)$.

4. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 2$.

a. Donner, pour tout réel x de $] - 1, 1 [$, une expression simplifiée de $g_\alpha(x)$ en fonction de x .

b. Donner le développement en série entière de g_α .

5. Pour tout entier naturel non nul k , et tout réel x de $] - 1, 1 [$, on pose : $P_k(x) = \cos(2^k \text{Arc sin } x)$

a. Montrer que, pour tout réel x de $] - 1, 1 [$, P_k est une fonction polynomiale de x , dont on précisera le degré. On désignera par c_k le coefficient du terme de plus haut degré de $P_k(x)$.

b. c_{k-1} étant le coefficient du terme de plus haut degré de $P_{k-1}(x)$, donner une relation entre c_{k-1} et c_k .

$$ii. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

III. Troisième partie

Soit β un réel strictement positif. On pose : $I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x} .$

1. Montrer que, pour $\beta \leq 1$, l'intégrale I_β diverge.

2. On se place désormais dans le cas où $\beta > 1$.

Pour tout entier naturel k , on pose :

$$I_{k,\beta} = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\beta \cos^2 x}$$

a. Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{k \geq 0} I_{k,\beta} \right)$ et de l'intégrale I_β .

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \leq I_{k,\beta} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}$$

c. Soit C un réel non nul. On pose :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+C^2 \cos^2 x}$$

A l'aide du changement de variable

$$t = \tan x$$

calculer J .

d. Pour quelles valeurs de β l'intégrale I_β est-elle convergente ?

En Mécanique, on a souvent besoin, pour résoudre simplement et formellement des problèmes, d'approximer les quantités considérées (déplacement, ...). Pour cela, on utilise le panel des outils proposés à cet effet par l'analyse mathématique : séries, séries entières, séries de Fourier, ...