Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le problème se compose de 4 parties. Les 3 premières parties sont totalement indépendantes entre elles. La quatrième partie utilise les résultats des parties précédentes mais peut se traiter en admettant ces résultats.

Si n est un entier, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de cet ensemble.

Si A est une matrice, on note ${}^tA$ sa transposée. $Tr(A)$ désigne la trace de A.

On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.

Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F. On note E^* l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Dans tout le problème, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \phi_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & AM \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tau_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & Tr(AM) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

Questions préliminaires

1. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les applications ϕ_A, τ_A et γ_A sont linéaires.
2. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
3. Enoncer le théorème de la base incomplète.

Partie I : Un exemple

Dans cette partie, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.
3. On pose

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que la famille $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Calculer $\phi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$.

   (c) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$.

   (d) L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de ϕ_A (on rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie II : Réduction de l'endomorphisme ϕ_A

On se fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A, c'est également une valeur propre de A.

3. Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A.
4. Donner l'ensemble des valeurs propres de ϕ_A.
5. Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A l'est également (on pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de ϕ_A).

Partie III : Un théorème de factorisation

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$. Le but de cette partie est de montrer que

$$Ker(u) \subset Ker(v) \iff \exists w \in \mathcal{L}(F,G),\ v = w \circ u.$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$.
   Montrer que $Ker(u) \subset Ker(v)$.
2. On suppose que $dim\, E = n$, $dim\, ker(u) = n - p$ et $dim\, F = r$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E de sorte que $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $Ker(u)$.
   Quelle est alors la dimension de $Im(u)$?
   (b) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de $Im(u)$.
   (c) On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit une base de F. On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par

   $$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que, si $Ker(u) \subset Ker(v)$, alors $v = w \circ u$.

Partie IV : Une caractérisation des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que la matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout entier naturel non nul k, λ^k est une valeur propre de A^k.
2. On suppose A nilpotente.
   (a) Montrer que la seule valeur propre de A est 0.
   (b) Montrer que $Tr(A) = 0$.
3. On suppose toujours A nilpotente.
   (a) Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.
   (b) En déduire que $Ker\, \gamma_A \subset Ker\, \tau_A$.

(c) i. Soit $K = (k_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que

$$Tr({}^tK\,K) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2.$$

ii. Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle M, N \rangle = Tr({}^tM\,N).$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

iii. En déduire que, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi(M) = Tr(U\,M).$$

iv. En déduire, en utilisant les résultats de la question 3b de cette partie et des résultats de la partie III, qu'il existe une matrice B telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.

(d) Montrer que $A = BA - AB$.

4. On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, $BA^k - A^kB = kA^k$.

(b) A quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?

(c) En déduire que A est nilpotente.

FIN DE L'EPREUVE.