Dans tout le problème, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère les applications suivantes :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \qquad \tau_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & Tr(AM) \end{array}$$

$$\gamma_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

Questions préliminaires

1. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les applications ϕ_A, τ_A et γ_A sont linéaires.
2. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
3. Enoncer le théorème de la base incomplète.

Partie I : Un exemple

Dans cette partie, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.
3. On pose

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que la famille $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $\phi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$.
   (c) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$.
   (d) L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de ϕ_A (on rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie II : Réduction de l'endomorphisme ϕ_A

On se fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ϕ_A, c'est également une valeur propre de A.