

* Banque filière PT *

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

A rendre avec la copie :

4 feuilles de papier millimétré.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit α un réel.

1. Soit \mathcal{S} la surface d'équation

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 0.$$

- (a) Quelle est la nature de \mathcal{S} ?
- (b) Quelle est la nature de l'intersection entre \mathcal{S} et un plan d'équation $z = \alpha$? (on pourra séparer plusieurs cas en fonction des valeurs du paramètre α). Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha = 1$ (on précisera les points d'intersection entre la courbe et les axes de coordonnées).

- (c) Quelle est la nature de l'intersection entre \mathcal{S} et un plan d'équation $x = \alpha$?
Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha = 1$ (on précisera les éléments caractéristiques de la courbe : sommets, asymptotes, ...).

2. Soit q la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = y^2 + 2xz.$$

- (a) Pour tout couple de réels (x, z) , donner une relation entre xz , $(x+z)^2$, et $(x-z)^2$.
(b) Ecrire q comme combinaison linéaire de trois carrés.
(c) Déterminer une transformation orthogonale $\phi : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ telle que

$$q(x, y, z) = aX^2 + bY^2 - aZ^2$$

où a et b sont des constantes positives que l'on précisera.
Quelle est la nature de l'application ϕ ?

3. On considère la quadrique \mathcal{S}_1 d'équation

$$y^2 + 2xz - 2x = 0.$$

Quelle est la nature de \mathcal{S}_1 ? Préciser le centre de cette quadrique.

4. On note \mathcal{P}_1 l'intersection entre \mathcal{S}_1 et le plan xOy . Quelle est la nature de \mathcal{P}_1 ?
5. Donner une équation cartésienne du cône \mathcal{C}_1 ayant pour sommet le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, s'appuyant sur la courbe \mathcal{P}_1 .
6. Soit A le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) , $z_A \neq 0$. On désigne par \mathcal{C}_A le cône de sommet A et s'appuyant sur \mathcal{P}_1 .
(a) Donner une équation cartésienne de \mathcal{C}_A .
(b) A quelle condition sur (x_A, y_A, z_A) le point B de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient-il à \mathcal{C}_A ?
(c) Déterminer l'ensemble des sommets des cônes de \mathbb{R}^3 contenant \mathcal{P}_1 et le point B .

Partie II

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note \mathcal{P} et \mathcal{Q} les surfaces d'équations respectives

$$\mathcal{P} : x^2 + y^2 - 8z = 0$$

$$\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + 2z = 0.$$

1. (a) Quelle est la nature des surfaces \mathcal{P} et \mathcal{Q} ?
(b) Vérifier que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des surfaces de révolution, et déterminer, pour chacune d'elles, leur axe.
(c) Donner l'allure de \mathcal{P} et \mathcal{Q} sur un même dessin.

Partie III

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ dont une équation en coordonnées polaires est donnée par :

$$\rho = e^{2\theta}.$$

1. Donner la pente de la tangente à la courbe au point de paramètre θ .
2. Calculer $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \rho(\theta)$ et $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho(\theta)$.
Qu'en déduisez-vous quant à l'allure de la courbe Γ ?
3. Calculer la longueur de l'arc compris entre les points d'angle polaire 0 et π .
4. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'arc précédent et l'axe des abscisses.
5. Déterminer le repère de Frenet associé à Γ au point de paramètre θ .
6. Déterminer le rayon de courbure de Γ au point de paramètre θ .
7. (a) Rappeler la définition de la développée d'une courbe.
(b) Quelle est la développée de la courbe Γ ?
8. Dessiner sur un même dessin la courbe Γ et sa développée.

Les deux premières parties de ce problème étudient des lieux de points de l'espace satisfaisant une même propriété géométrique. On obtient une surface dans le premier cas, une courbe tracée sur une surface dans le second cas. La troisième partie étudie certaines propriétés caractéristiques de la spirale logarithmique (une des courbes solution du problème de la partie II).