F30B

✵ Banque filière PT ✵

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le problème est composé de 3 parties totalement indépendantes.

Pour tout entier naturel n, nous notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n.
Nous identifierons dans tout ce problème un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique.

Préliminaires

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique.
2. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale.

3. Soient p, q, m, n des entiers naturels strictement positifs.
   Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ sont deux matrices à coefficients réels,
   (a) A quelle condition sur p, q, m, n le produit matriciel AB est-il possible ?
   (b) Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (c) Si on note c_{ij} le coefficient générique de la matrice AB, donner son expression en fonction des coefficients des matrices A et B.

Partie I

Dans cette partie, on considère les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les déterminants de L et A.
2. Montrer que les matrices L et A sont inversibles.
   Calculer l'inverse de L.
3. Déterminer une matrice U triangulaire supérieure telle que $A = LU$.

Partie II

Soit L, U et $A = LU$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, de coefficients respectifs, ℓ_{ij}, u_{ij} et a_{ij}.

1. A quelle condition sur les coefficients ℓ_{ij} la matrice L est-elle triangulaire inférieure ?
   A quelle condition sur les coefficients u_{ij} la matrice U est-elle triangulaire supérieure ?
2. Nous supposerons dorénavant que U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.
   Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, montrer que l'on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}. \tag{1}$$

3. On considère, jusqu'à la fin de cette partie, la matrice d'ordre 3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que A est inversible.

4. On cherche maintenant une matrice U triangulaire supérieure et une matrice L triangulaire inférieure ayant de plus tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, telles que $A = LU$.
   (a) En utilisant la formule (1) pour a_{11}, calculer u_{11}.
   (b) En exprimant ensuite a_{i1}, calculer ℓ_{i1} pour tout $i \leq 3$.
   (c) En exprimant a_{12}, calculer u_{12}.
   (d) En exprimant a_{22}, calculer u_{22}.
   (e) En exprimant a_{32}, calculer ℓ_{32}.
   (f) En raisonnant de manière analogue, déterminer les coefficients restants.
5. Calculer U^{-1} et L^{-1}.
6. En déduire la solution de l'équation

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Partie III

Notons $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. C'est à dire, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous posons

$$|||B||| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

1. Calculer $|||I|||$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Bx\| \leq |||B||| \, \|x\| \, .$$

3. Soit α un réel tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|Bx\| \leq \alpha \, \|x\| \, .$$

   Comparer α et $|||B|||$.
4. Montrer que pour toutes matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|||B_1 B_2||| \leq |||B_1||| \, |||B_2||| \, .$$

5. Soit B une matrice diagonale où les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont rangés de telle sorte que

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|.$$

   On note e_i le i-ème vecteur de la base canonique.

(a) Que vaut Be_i ?

(b) En décomposant un vecteur x quelconque dans la base canonique, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Bx\| \leq |\lambda_n|\,\|x\|.$$

(c) Montrer que

$$|||B||| = |\lambda_n|.$$

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que la matrice $S = {}^tBB$ est diagonalisable.

(b) Si u est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ, calculer $\|Bu\|^2$ en fonction de $\|u\|^2$ et de λ (Il peut être utile de remarquer que, pour tout vecteur colonne y de $\mathbb{R}^n$, on a $\|y\|^2 = {}^tyy$).
En déduire que toutes les valeurs propres de S sont positives.
Notons $\rho({}^tBB)$ sa plus grande valeur propre.

(c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P telle que

$$D = {}^tPSP.$$

(d) En déduire qu'il existe n nombres réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que nous supposerons rangés par ordre croissant et n vecteurs $p_1, \dots, p_n$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & {}^tp_ip_i = 1, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, & Sp_i = \lambda_i p_i, \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j, & {}^tp_ip_j = 0. \end{cases}$$

(e) Si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, que valent $\|x\|$ et $\|Bx\|$?

(f) En décomposant un vecteur x quelconque dans la base $(p_1, \dots, p_n)$, montrer que $|||B||| = \sqrt{\rho({}^tBB)}$.

7. On considère la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $|||B|||$.

Les 2 premières parties présentent la décomposition LU d'une matrice qui permet de calculer facilement l'inverse de la matrice A^{-1} et donc de résoudre le système linéaire $Ax = b$ numériquement. La troisième partie introduit la notion de rayon spectral d'une matrice. On peut ensuite montrer (ce n'est pas l'objet de ce problème) que la condition $\rho({}^tBB) < 1$ implique que la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = Bx_k + b \end{cases}$$

converge quand k tend vers l'infini vers la solution du système linéaire

$$(I - B)x = b.$$

Cela permet de donner numériquement une valeur approchée de la solution de ce système en un temps beaucoup plus rapide que la méthode précédente.