**MATHEMATIQUES I-A**

Durée : 4 h 00

Le but de ce problème était d'étudier une équation différentielle non linéaire du premier ordre tu type y'=G(y) et en particulier de montrer que les positions d'équilibre stables de ce système dynamiques correspondent à un Jacobien dont les valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives. Le sujet était divisé en quatre parties : la première traitait du cas particulier du pendule amorti bien connu en physique, la deuxième étudiant le cas d'un système linéaire d'équations différentielles, la troisième partie étudiait le problème en dimension 1 et enfin la dernière partie consistait en l'étude du cas général. La qualité mathématiques des copies est encore une fois très médiocre. Notons tout de même une présentation claire et une certaine honnêteté dans la rédaction.

La première partie étudiait donc un cas particulier en dimension 2. Elle était relativement facile mais a déjà fait apparaître de grosses lacunes.

1. Question triviale traitée par tous les candidats.
2. Cette question a été plutôt bien traitée mais énormément de candidats écrivent sin x = 0 si et seulement si x = k □ pour k entier naturel (seulement)! quand certains ne le limitent pas à l'ensemble {0,1,…,n} pour un entier n non défini.
3. A été plutôt bien traitée si la question précédente l'était.
4. A part un certain nombre de candidats qui ne connaissent visiblement pas la notion de matrice jacobienne, cette question a été bien traitée même si beaucoup de matrices sont écrites à l'envers (transposée de la jocobienne au lieu de la jacobienne elle-même).
5. Il est apparu à cette question que plus de la moitié des candidats ne sont pas parvenu à trouver les racines d'un polynôme de degré 2 (où les coefficients dépendaient certes de paramètres). Certains discutent bien du signe du discriminant mais prennent tout de même la racine carrée d'une quantité négative alors que d'autres ne se soucient même pas du signe de ce discriminant.
6. Il s'agissait ici d'étudier le lien entre les états d'équilibre et les valeurs propres de la jacobienne dans ce cas précis et non dans un cadre très général, non au programme.

La partie deux consistait dans un premier temps à obtenir la forme générale des solutions d'un système d'équations différentielles linéaire d'ordre 1 afin d'étudier la limite de ces solutions lorsque le paramètre tend vers l'infini.

1. Tous les candidats connaissent la forme des solutions d'une équation du premier ordre dans R mais beaucoup passent par un logarithme pour l'obtenir, je doute que beaucoup de candidats savent ce que vaut le logarithme d'un nombre complexe.
2. L'étude d'une équation avec second membre est bien connu, cependant beaucoup se contentent de chercher une solution particulière de la même forme et affirment qu'un polynôme est solution de l'équation qu'ils obtiennent sans le vérifier réellement.
3. Il suffisait ici d'appliquer le théorème de superposition des solutions, ce qu'un certain nombre (trop peu) de candidats ont fait.
4. Cette question a été très peu traitée alors que c'est la seule méthode que les candidats connaissent pour résoudre un tel système. Nous attendions également dans cette question un vrai effort de rédaction et en particulier une démonstration par récurrence correctement posée et non un argument du style « un raisonnement en cascade abouti au
5. résultat cherché ».

Mentionnons également au sujet de cette question que toutes les matrices à coefficients complexes ne sont pas diagonalisables, et surtout pas celles qui n'admettent qu'une seule valeur propre.

6. Le raisonnement était le même que le précédent et la fin était pratiquement du cours.
7. Peu de candidats voient le rapport entre les valeurs propres de A et les solutions de AZ=0.

La troisième partie traitait d'une équation différentielle unidimensionnelle non linéaire. Il s'agissait de montrer que la solution tend exponentiellement vite vers un point d'équilibre si ce dernier est stable et si la condition initiale est 'suffisamment' proche de ce point.

1. Peu de candidats ont répondu à cette question (ainsi qu'à la suivante) et le problème d'unicité des solutions d'une équation différentielle n'est pas du tout assimilé. Il ne s'agissait pas ici d'utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz qui n'est pas au programme mais uniquement de dire que, d'après les hypothèses de l'énoncé, il y a unicité de la solution étant donnée une condition initiale. Mais seuls une petite partie des candidats semble en mesure d'utiliser ce raisonnement. Mentionnons, également que beaucoup ont montré que la solution était nulle mais l'argument principalement utilisé était que la dérivée de la fonction s 'annulait en 0 et donc que la fonction était constante.
2. Mêmes remarques que précédemment si ce n'est des arguments encore un peu plus farfelus.
3. Question relativement bien traitée, la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement semble acquise.
4. Il s'agissait ici d'utiliser la définition (avec les □) de la continuité, ce qui, au vu de la question (et de la question précédente) semble assez clair. La question n'a pourtant été traitée correctement que par environ 1/3 des candidats.
5. L'argument de continuité de la question a) a encore été moins bien traitée que la précédente. En revanche, la question b) qui demandait une synthèse des résultats précédents a été largement abordée, souvent avec succès, mais a fait apparaître également de grosses difficultés dans la manipulation des inégalités et des valeurs absolues pour beaucoup de candidats. Mentionnons également à cette occasion l'utilisation abusive du signe équivalence qui a manifestement perdu son statut de lien logique pour celui de conjonction de coordination, voire de signe de ponctuation.
6. Le prolongement de l'inégalité de [0,T] à tout **R** était certes très délicat. Mais dire que l'on peut choisir le T comme l'on veut montre une totale incompréhension des résultats faisant intervenir la notion d'existence.

La dernière partie consistait à obtenir le résultat principal concernant la stabilité des points d'équilibre d'un système d'équations différentielles non linéaire. Elle était de loin la plus difficile et les dernières questions dépassaient certainement le niveau requis pour la filière PT. Cependant le début de cette partie restait abordable. Néanmoins, la grande majorité des candidats manipulant les vecteurs comme s'il s'agissait de réels, peu de points ont été acquis ici. Signalons également que la matrice de l'endomorphisme dans la base donnée n'est apparue dans aucune copie.