## MATHEMATIQUES I-A

### COMMENTAIRE GENERAL

Le problème était constitué de trois parties indépendantes. Dans la première d'entre elles on étudiait le théorème de Césaro, sa généralisation et quelques applications classiques. Dans la deuxième partie, le candidat était amené à étudier le comportement d'une série entière au bord de l'intervalle ouvert de convergence. La troisième partie était consacrée à la démonstration du théorème de Borel.
Les candidats étaient très guidés dans ce problème, si bien qu'une lecture attentive du sujet et une bonne connaissance du cours devaient leurs permettre d'obtenir une note convenable ; ce ne fut pas le cas pour nombre d'entre eux.
Une épreuve écrite consiste pour un candidat à rédiger un texte ; cela nécessite un effort de sa part. Il ne suffit pas d'avoir raison, il faut encore donner les moyens aux correcteurs de s'en convaincre. Il ne faut cependant pas confondre ce soin à apporter à la rédaction, avec un délayage indigeste des réponses aux questions les plus élémentaires. Il faut savoir faire preuve de rigueur, précision et limpidité. Les ambiguïtés dues à des formulations difficilement compréhensibles, à des quantifications molles, à des phrases dénuées de sens ou à une écriture illisible ne peuvent profiter au candidat.

### ANALYSE PAR PARTIE

### PARTIE A

1.a. Il s'agissait ici de démontrer le très classique théorème de Césaro. Plus de la moitié des candidats ne connaît pas la définition de la convergence d'une suite, cette lacune empêchait les candidats de poursuivre.
1.b. Très peu de candidats ont réussi à répondre à ces questions.
2. Cette question a été mieux réussie. Cependant, beaucoup de candidats manipulent les équivalents avec fantaisie.
3.a. Là encore, le cours n'est pas su, 10% des candidats ont réussi cette question.
3.b. Assez peu de candidats démontrèrent la généralisation du théorème de Césaro. La manipulation des epsilon est assez approximative.
4.a. Cette question fut mieux traitée que la précédente, beaucoup de candidats ont su appliquer le théorème précédent.
4.b. Cette question difficile présentait un piège car les coefficients $\square_k$ dépendent de n. Le principe de la démonstration était cependant le même que celui de la question 3.b.

### PARTIE B

1. Le lemme d'Abel n'est connu que par 10% des candidats.
2. Ici encore, il s'agit d'une question de cours. Un tiers des candidats est parvenu à répondre correctement.
3.a.i. Il est important de rappeler aux candidats que les tentatives de bluff, ou la mauvaise foi visible de certains, ont toutes les chances d'échouer, et rendent généralement les correcteurs, originellement bienveillants, d'une humeur détestable. Un quart des candidats réussirent cette question.
3.a.ii. Il fallait ici utiliser la convergence de $(S_n)$ vers S et celle de $(x_n)$, avec $|x| < 1$, vers 0. Assez peu de candidats ont pensé à ces deux arguments.
3.b. Assez peu de candidats ont rédigé rigoureusement cette question, notamment en ce qui concerne les problèmes de convergence. Ici encore, un nombre trop important de candidats ne connaît pas son cours, le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ leur est inconnu ; pour ces candidats, la résolution de la question 3 s'arrêta là.
3.c. La manipulation très approximative des epsilon fut ici encore un écueil insurmontable pour trois quart des candidats. Les questions étaient pourtant très progressives.
4. Un nombre important de candidats a su utiliser le résultat 4.d. pour étudier cette s´erie. Le critère des séries alternées n'est que trop rarement cité correctement.

***PARTIE C***

1. Cette question, très proche du cours n'a été traitée que par très peu de candidats.
2. Ici encore, il s'agit d'une question de cours. Les arguments les plus fantaisistes ont surpris les correcteurs, certains candidats invoquent par exemple le caractère $C^{\infty}$ des fonctions polynomiales. Un tiers des candidats est parvenu à répondre correctement.
3.a. Une lecture attentive de l'énoncé suffisait pour répondre à cette question.
3.b. et 3.c Ces questions furent globalement bien traitées.
3.d. Les rares candidats étant parvenus à ce stade du problème ont trop souvent oublié de justifier pourquoi $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{|r_n|}{n!} t^n = 0$.

La fin de la troisième partie comportait des questions sensiblement plus difficiles qui n'ont été abordées de manière substantielle que dans les meilleures copies.

# MATHEMATIQUES II-A

Il s'agissait d'une épreuve d'exercices (sans calculatrice) comportant quatre exercices indépendants.

## COMMENTAIRE GENERAL :

Rappelons qu'une épreuve d'exercices permet d'aborder des sujets différents, d'une forme très classique comme en 4-1 et 4-2,, ou beaucoup plus originale comme en 1-1 et 1-2.
Par ailleurs, même si nous sommes très favorables à l'utilisation de moyens de calcul performants, nous pensons qu'un ingénieur se doit de maîtriser des techniques élémentaires de calcul. Aucun calcul à effectuer ne nécessitait d'utiliser des formules peu usitées et aucun calcul ne durait plus d'une demi page. C'est pourquoi, en général, le jury a été déçu de l'incapacité chronique de certains candidats à effectuer le moindre calcul « à la main ».
Il est important que les élèves et leurs professeurs réagissent.
Enfin, une remarque particulière sur les abréviations (celle de l'année : ROND pour Repère OrthoNormé Direct) : une copie ne doit pas être une épreuve de décodage pour le correcteur.

### Premier exercice :

Le 1-1 et le 1-2 étaient des moyens originaux de retrouver des résultats classiques. Encore fallait-il savoir ce qu'est une somme de Riemann et utiliser correctement l'inégalité triangulaire (entre sommes finies !).
L'invocation du théorème de Cauchy-Schwartz ne rapportait évidemment aucun point.
Le 1-3 était très facile, mais le jury a été consterné de ne trouver la nullité du minimum de la fonction □ que dans une copie sur quatre.
Le 1-4 a été très peu traité.

### Deuxième exercice :

A la première question, de nombreux candidats ont montré que si $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\square}\square\vec{i}\ldots,(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ était un repère orthonormal, ce qui n'était pas le résultat demandé. L'argumentation était essentielle dans cette question. Par ailleurs, le calcul de $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est en général correct.
Au 2, l'existence de $c_1$ et de $c_2$ n'est montrée que dans une copie sur trois, leur caractère strictement positif dans une sur dix ; c'était pourtant un calcul élémentaire.
Au 3, les ellipsoïdes ont souvent été reconnus, mais il est évident qu'une impasse est fréquente sur les quadriques.
En 4, le jury a été à nouveau troublé par le fait qu'un grand nombre de candidats ne sait pas trouver l'équation d'un plan tangent à une surface, et un vecteur normal à un plan.

### Troisième exercice :

La première question était originale pour un élève de PT, et a été très peu traitée. Il suffisait de savoir calculer une intégrale double sur un triangle en inversant l'ordre des variables.
En 2, peu de candidats ont vu que sur la diagonale du carré on avait a priori deux formules différentes.
La recherche d'un extremum a été faite la plupart du temps sans qu'il ne soit porté la moindre attention au fait que le carré n'était pas un ouvert. Enfin l'existence d'extrema pour une fonction continue sur un fermé borné est quasiment inconnue.

### Quatrième partie :

En 1, le jury se demande à nouveau comment on peut représenter une courbe sans en avoir étudié au préalable les fonctions coordonnées …et les points stationnaires
Un peu de trigonométrie élémentaire sur l'arc moitié était nécessaire à la deuxième question qui n'est donc pas traitée par plus d'un tiers des candidats.
Au 3, remarquons que si le vecteur de la translation dépend du paramètre □ , on ne passe plus d'une courbe à l'autre par une translation.. Les petites figures, fort utiles, sont rarissimes.
La quatrième question était élémentaire

## MATHEMATIQUES I B

Durée : 4 heures

### PRESENTATION DU SUJET

L'objet de cette épreuve était la résolution de quelques problèmes d'optimisation avec ou sans contrainte. Elle était composée de sept parties. Les deux premières parties consistaient en des problèmes « pratiques », les parties 3, 4 et 5 permettaient d'obtenir des résultats plus abstraits qui servaient pour la résolution des parties 6 et 7. Les résultats ont été très inégaux et mis à part quelques excellentes copies, le niveau général est plutôt médiocre. On peut en effet regretter que beaucoup de candidats ne soient capables de faire que quelques calculs élémentaires et qu'aucun raisonnement abstrait, aussi simple soit il, ne puisse leur être demandé. Les mathématiques se restreignent alors à une vision purement « algorithmique » où l'on applique des recettes sans vraiment comprendre ce que l'on fait. La dernière partie de ce problème avec l'utilisation des notations de Monge à tort et à travers en est l'exemple le plus frappant.

### ANALYSE PAR PARTIE

**La première partie** consistait en la résolution d'un problème pratique d'optimisation à une variable. Cette partie a donné lieu à de bons résultats. Toutefois, nous aurions aimé une réelle preuve pour la résolution de la seconde question, là où beaucoup se sont contentés d'affirmer que la situation critique se situait au point de symétrie. Cela était effectivement le cas mais pas si évident que cela. De plus, la symétrie du problème n'était là que pour simplifier les calculs ultérieurs. Faut-il supprimer les cas simples pour avoir de réels raisonnements rigoureux ?

**Le seconde partie** consistait cette fois en un problème pratique d'optimisation à deux variables liées mais dont l'une des variables s'exprimait aisément en fonction de l'autre. Cette partie a été globalement bien traitée. Il faut cependant mettre en avant la nécessité de vérifier l'obtention d'un réel minimum, beaucoup se contentant d'obtenir un point critique sans aucune autre justification.

**La troisième partie** consistait en la démonstration du théorème du point fixe dans le cas d'une fonction contractante sur un intervalle réel. La suite des questions suggérait une démonstration à l'aide d'une suite récurrente (qui peut être généralisée à d'autres cas) bien qu'une démonstration directe soit ici possible. Il semble que nous ayons atteint ici le summum de l'abstraction pour beaucoup de candidats. En effet, la notion de continuité n'est assimilée que pour moins d'un tiers des candidats (nous ne parlons ici même pas de manipulation fine des epsilons). De même une suite convergente est bien souvent égale à sa limite à partir d'un certain rang, ce qui simplifie beaucoup les démonstrations. Il semble que, bien que capables d'étudier la convergence d'une suite ou d'une série donnée, beaucoup de candidats soient désarmés devant une question d'ordre générale sur un tel sujet.

**La quatrième partie** (la plus difficile il nous semble) consistait en la démonstration du théorème des fonctions implicites dans le cas d'une fonction de deux variables. Cette démonstration nécessitait des manipulations un peu délicates de la notion de continuité et, vus les piètres résultats de la partie précédente, il est clair que bien peu ont réussi à comprendre ce qui était demandé. Là encore soulignons le nombre incalculable de copies dans lesquelles la dérivée d'une fonction est égale à son taux de variation ! Il faut remarquer également qu'un certain nombre de candidats connaissent le théorème des fonctions implicites (bien que non au programme) mais aucun n'a reconnu que l'obtention de ce théorème était le but de cette partie.

**La cinquième partie** utilisait le théorème des fonctions implicites précédent afin d'obtenir une condition nécessaire permettant de chercher les points critiques dans le cas d'un problème d'optimisation avec contrainte. Cette partie ayant été très peu traitée, nous n'en parlerons pas plus.

**La sixième partie** était une application directe de la partie précédente. Il suffisait de lire et de comprendre quelque peu cette cinquième partie pour pouvoir résoudre le problème (et récolter des points non négligeables). Cela a donc été du tout ou rien pour les candidats qui ont soit totalement ignoré cette partie, soit l'ont traitée dans sa quasi intégralité. Là encore la plupart des candidats ont seulement montré l'existence d'un seul point critique. Néanmoins, la preuve de l'existence d'un minimum était très difficile ici.

**La dernière partie** consistant en l'obtention des maxima et minima locaux d'une fonction de deux variables continue sur un compact. Comme nous l'avons dit au début, nous avons pu constater une utilisation quasi anarchique de la hessienne pour l'obtention de ces extrema. Précisons que :

- Il faut tout d'abord chercher les points critiques avant de calculer la hessienne
- Cette méthode ne donne que des extrema locaux
- Elle n'est utilisable que sur un ouvert (c'est à dire ici à l'intérieur du domaine considéré)
- Dans le cas où elle est dégénérée, dire « on ne peut pas conclure » n'est pas une conclusion valable !

Il n'était pourtant pas difficile de dire qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes (question explicitement posée) et qu'une fonction positive qui s'annule en un point atteint son minimum global en ce point. Enfin beaucoup semblent ignorer que les extrema peuvent être atteint sur le bord du compact et qu'il faut faire une étude particulière pour ce bord. Bien souvent les candidats se lancent dans l'utilisation d'une recette calculatoire dans un réflexe Pavlovien alors que quelques instants de réflexion auraient suffit.

**MATHEMATIQUES II B**

Durée : 4 heures

## PRESENTATION DU SUJET

Ce problème était composé de trois parties, ordonnées en fonction de la difficulté.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants ( et demandons à leurs professeurs de les leur transmettre ) :

1. Les définitions du cours doivent être données de façon précise.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite son énonciation ( en ne se contentant donc pas de le mentionner ), et la vérification des hypothèses au moment de l'utilisation.
3. La rédaction doit être rigoureuse.
4. Le cours n'est pas seulement une succession de théorèmes utilisables, mais comprend aussi des démonstrations qui peuvent faire l'objet de questions aux concours.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils dans les questions les plus proches du cours ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne, même sans avoir abordé d'autres questions.

Nous avons regretté que certains candidats butent sur des questions élémentaires comme l'étude des variations ou le tracé du graphe d'une fonction.

## COMMENTAIRE GENERAL DE L'EPREUVE

### I. Décomposition en Série de Fourier

*Cette partie est essentiellement constituée de questions sinon de cours, du moins très proches du cours.*

1. La définition d'une fonction $C^1$ par morceaux, déjà demandée dans le sujet de 2002, n'a été redonnée correctement que par très peu de candidats.

Le théorème de Dirichlet, cité un peu plus souvent, est cependant fréquemment incomplet ; on trouve aussi des variantes assez originales : « *Dérichlé* », « *Parseval* », « *Legendre* », …

2. Cette question fut rarement correctement traitée.

3. *a.* De manière surprenante, la linéarité n'a pas toujours été démontrée.

*b.* Les expressions correctes $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ ne sont pas toujours données.

4. En général, cette question a été correctement traitée.

5. *a.* De nombreux candidats se révèlent incapables de tracer le graphe d'une fonction aussi simple.

*b.* Cette question a, dans l'ensemble, été correctement traitée. Toutefois, certains candidats, omettant la parité de $f_3$, refont le calcul ( avec des fautes, le plus souvent ) des coefficients $b_n$.

*c.* Le calcul de $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ a souvent été fait, celui de $\sum_{n=1} \frac{1}{n^4}$ moins fréquemment, de nombreux candidats ne connaissant pas l'expression *exacte* de la formule de Parseval.

### II. Approximation d'une fonction continue

1. *a.* Les variations des fonctions $g$ et $g_n$ n'ont pas toujours été bien étudiées, certains ne retrouvant pas la nullité des fonctions en – _ et _ ; de plus, l'hypothèse $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(t)dt = 1$ n'est pas toujours utilisée pour retrouver le signe de $D_n$.

*b.* Le calcul de $J_n$ n'a pas toujours été fait.

*c.* La relation liant $I_n$ et $J_n$ est obtenue par la majorité des candidats.

*d.* La plupart des candidats trouvent que $D_n = \frac{1}{I_n}$ , mais se contentent souvent de recopier l'énoncé pour la 2 ème égalité…

2. *a.* Cette question, a, globalement, été correctement traitée.

*b*. Beaucoup de candidats n'ont pas reconnu la série « télescopique »…

*c.* L'équivalent de $D_n$ lorsque $n$ tend vers + • n'est pas toujours obtenu, alors qu'il suffit d'utiliser les résultats donnés par l'énoncé.

*d*. Le graphique n'est pas toujours réalisé.

3. *a*. La définition de la continuité n'est pas toujours donnée, certains citant « l'inégalité des accroissements finis », d'autres le « théorème de Rolle », …

*b.* Peu de candidats ont traité cette question.

*c.* En raison d'un « bug » de *Word* lors de l'impression du sujet, le signe « union » présent sur le fichier informatique s'est transformé en signe « inter » : cela fonctionnait bien sur écran et sur les imprimantes, sauf sur la dernière imprimante laser utilisée par l'imprimeur. Les candidats l'ont pour la plupart souligné.

Certains même n'ont pas traité la question tout en le remarquant ( y compris des copies par ailleurs très mauvaises ).

*d.* Cette question a souvent été traitée.

*e.* Cette question a été peu traitée. Toutefois, certains ont bien vu le découpage de l'intégrale, et ont donc gagné des points, même sans avoir répondu aux questions précédentes.

4. Cette question a été rarement traitée, à l'exception du 4.a.

**III. Théorème d'échantillonnage**

1., 2. Ces questions ont, en général, été à peu près correctement traitées.

3. Le *a.* et le *b.* ont été peu traités.

*c*. Cette question a souvent été traitée.

*d*. L'interprétation a été, quelques fois, correctement donnée.