I54T

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PRÉAMBULE

Soient $(\sum s_n z^n)$ et $(\sum t_n z^n)$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_S et R_T non nuls. Pour tout entier naturel n, on désigne par S_n et T_n les sommes partielles définies par :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} s_k\, z^k \ , \quad T_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} t_k\, z^k \ ,$$

et par

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k\, z^k \ , \quad T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k\, z^k \ ,$$

les limites de ces sommes à l'intérieur des disques de convergence respectifs.

1. Calculer les trois produits $S_0(z)\,T_0(z)$, $S_1(z)\,T_1(z)$ et $S_2(z)\,T_2(z)$ en fonction des coefficients des séries entières $(\sum s_n z^n)$ et $(\sum t_n z^n)$.

2. On pose, pour tout entier n : $u_n = \sum_{m=0}^{m=n} s_m\, t_{n-m}$. Montrer que le produit $S_n(z)\ T_n(z)$ peut se mettre sous la forme :

$$S_n(z)\ T_n(z) = \sum_{k=0}^{k=n} u_k\, z^k + z^n\, R(z)$$

où R est un polynôme de degré n, que l'on ne cherchera pas à expliciter.

On dit alors que la série entière $(\sum u_n\, z^n)$ est la série produit des séries $(\sum s_n\, z^n)$ et $(\sum t_n\, z^n)$. Dans toute la suite, on admettra que cette série produit est de rayon de convergence R_{ST} supérieur ou égal au plus petit des deux rayons R_S et R_T et que l'on a, pour tout z de l'intérieur de son disque de convergence, la relation :

$$S(z)\ T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\, z^k\ .$$

PARTIE I

Étude des nombres de Bernoulli

On définit les fonctions f et g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}\ ,\quad g(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}.$$

1. *a.* Quel est le domaine de définition des fonctions f et g ?
   b. Montrer que $f(z)$ tend vers une limite, notée $f(0)$, lorsque z tend vers 0.
   c. On suppose que la fonction f ainsi prolongée admet un développement en série entière. Quel est son rayon de convergence?

2. On admet que la fonction g est développable en série entière sur le disque ouvert D, de centre O, et de rayon 2π. Les nombres de Bernoulli seront ici définis comme les uniques nombres β_n tels que l'on ait, pour tout z de D, la relation :

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!}\, z^n.$$

a. Pour tout x réel, on considère la fonction h_x définie sur D par la relation :

$$h_x(z) = \frac{z\,\mathrm{e}^{z\,x}}{\mathrm{e}^z - 1}.$$

En utilisant les résultats du préambule, montrer qu'il existe une suite unique (B_n) de polynômes de la variable x, appelés polynômes de Bernoulli, tels que l'on ait, pour tout z de D, la relation : $h_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$.

b. Donner l'expression des polynômes de Bernoulli B_n en fonction des nombres de Bernoulli β_n.

c. Montrer que l'on a $B_n(0) = \beta_n$ pour tout entier n, $n \geq 0$.

d. Comparer $f(0)$ et β_0. Quelle est la valeur de β_0 ?

3. Dans toute cette partie, x est un réel quelconque et z est dans D.

a. Démontrer que $h_{1-x}(z) = h_x(-z)$, et en déduire, pour tout entier positif n, la relation

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

b. Vérifier que $h_{1+x}(z) = z e^{z\,x} + h_x(z)$, et en déduire, pour tout entier n strictement positif la relation

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n\,x^{n-1}.$$

Comparer alors $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

4. On désigne par δ_{mn} le symbole de Kronecker, égal à 1 si $m = n$ et égal à 0 sinon.

a. Pour m et n entiers, démontrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\,(n-m)\,\theta}\,d\theta = 2\pi\,\delta_{mn}$.

b. En déduire, pour tout réel r de $]0, 2\pi[$:

$$2\,\pi\,r^n\,\frac{B_n(x)}{n!} = \int_0^{2\pi} h_x(r\,e^{i\,\theta})\,e^{-i\,n\,\theta}\,d\theta.$$

c. Calculer, pour x réel et z dans D, la dérivée $\dfrac{\partial h_x(z)}{\partial x}$ en fonction de x et de z.

d. **En justifiant la dérivabilité de chacun des deux membres de la relation obtenue en I.4.b, démontrer, pour tout x réel et pour tout entier n strictement positif, la relation**

$$B_n'(x) = n\,B_{n-1}(x).$$

5. Pour tout entier n strictement positif, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx$ est nulle.

6. Pour tout entier n strictement positif, montrer que β_{2n+1} est nul.

7. *a.* Pour tout entier n, $n \geq 2$, montrer que β_n est égal à $B_n(1)$.
En déduire que la suite (β_n) est une suite de rationnels. (On pourra utiliser, en le justifiant, le fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k}\,\beta_{n-k}$ est nul pour n entier supérieur ou égal à 2.)

b. Calculer β_1, β_2 et β_3.

c. Pour tout x réel, montrer que : $B_1(x) = x - 1/2$, $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$.

PARTIE II

Étude de la fonction Zêta

Dans toute cette partie, n désigne un entier strictement positif. On désigne par $\widetilde{B}_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1, définie par :

$$\widetilde{B}_n(x) = B_n(x)$$

pour $0 < x < 1$, et par : $\widetilde{B}_n(0) = (B_n(0) + B_n(1))/2$.

1. *a.* Chaque fonction $\widetilde{B}_n$ est-elle de classe C^1 par morceaux?
   b. Représenter la fonction $\widetilde{B}_2$ sur $]-1/2, 1/2[$.

2. Dans toute cette partie II.2, k désigne un entier strictement positif.
   a. Chaque fonction $\widetilde{B}_n$ est-elle développable en série de Fourier, périodique de période 1, sous forme réelle? Donner, sans la calculer, l'expression intégrale des coefficients de ce développement, que l'on notera $a_0(\widetilde{B}_n)$, et, pour k entier, $k \geq 1$, $a_k(\widetilde{B}_n)$, $b_k(\widetilde{B}_n)$.
   b. Calculer $a_0(\widetilde{B}_1)$.
   c. Calculer, pour tout entier naturel strictement positif k, $a_k(\widetilde{B}_1)$, $b_k(\widetilde{B}_1)$, $a_k(\widetilde{B}_2)$ et $b_k(\widetilde{B}_2)$.
   d. Donner, pour tout entier naturel strictement positif k, une relation entre $a_k(\widetilde{B}_{n+1})$ et $b_k(\widetilde{B}_n)$, puis entre $b_k(\widetilde{B}_{n+1})$ et $a_k(\widetilde{B}_n)$.
   e. Que valent, pour tout entier naturel strictement positif k, $a_k(\widetilde{B}_{2n+1})$ et $b_k(\widetilde{B}_{2n})$?
   f. Pour tout entier naturel strictement positif k, montrer que : $a_k(\widetilde{B}_{2n}) = \dfrac{2\,(-1)^{n+1}\,(2n)!}{(2\,k\,\pi)^{2n}}$,
   et en déduire la valeur de $b_k(\widetilde{B}_{2n+1})$.
   g. En déduire, pour tout x réel :

$$\widetilde{B}_{2n}(x) = (2n)!\,2\,(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\,k\,\pi\,x)}{(2\,k\,\pi)^{2n}},$$

$$\widetilde{B}_{2n+1}(x) = (2n+1)!\,2\,(-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\,k\,\pi\,x)}{(2\,k\,\pi)^{2n+1}}.$$

3. Pour x réel, on considère la série de terme général $\dfrac{1}{k^x}$.
   a. Quel est le domaine de convergence de cette série? On notera alors $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$.
   b. Exprimer $\zeta(2n)$ en fonction des nombres de Bernoulli.
   c. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Les nombres de Bernoulli sont utilisés en mécanique des fluides pour déterminer la distribution statistique des vitesses des molécules d'un gaz parfait, et plus généralement en mécanique statistique pour calculer des fonctions thermodynamiques, telle l'enthalpie, à partir de considérations à l'échelle atomique ou moléculaire.