

* Banque filière PT *

Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice I

On note $\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}_0, \vec{j}_0\}$ la base orthonormée canonique de \mathbb{R}^2 .

On considère les deux formes quadratiques définies dans la base \mathcal{B}_0 par les relations :

$$q_1(\vec{U}) = 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2,$$

$$q_2(\vec{U}) = 2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2,$$

où l'on a posé $\vec{U} = x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0$.

I.1 Quelles sont respectivement dans la base \mathcal{B}_0 les matrices A_1 et A_2 des formes quadratiques q_1 et q_2 ?

I.2 Calculer $A_1A_2 - A_2A_1$.

On désigne respectivement par u_1 et u_2 les endomorphismes de \mathbb{R}^2 définis dans la base \mathcal{B}_0 par les matrices A_1 et A_2 .

Existe-t-il une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle les matrices de u_1 et u_2 sont toutes deux diagonales ?

I.3 On note \mathcal{R}_0 le repère $(O; \mathcal{B}_0)$ de \mathbb{R}^2 considéré comme plan euclidien orienté.

Soit a un réel strictement positif.

Soient C_1 et C_2 les coniques dont les équations dans le repère \mathcal{R}_0 sont respectivement $q_1(\vec{U}) = 8a^2$ et $q_2(\vec{U}) = a^2$.

Déterminer la nature, les éléments de symétrie et les asymptotes éventuelles des coniques C_1 et C_2 .

Existe-t-il une rotation de \mathbb{R}^2 qui amène simultanément les axes de \mathcal{R}_0 sur les axes de symétrie de C_1 et C_2 ?

I.4 Déterminer l'unique angle θ de $[0, \pi/2]$ tel que la rotation de centre O et d'angle θ transforme le repère \mathcal{R}_0 en un repère $(O; \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\})$ noté \mathcal{R}_1 dont les axes soient les axes de symétrie de C_1 .

Quelles sont les équations de C_1 et de C_2 dans ce nouveau repère \mathcal{R}_1 ?

I.5 On note $\vec{i}_2 = 2\vec{i}_1$, $\vec{j}_2 = \vec{j}_1$ puis \mathcal{R}_2 le repère $(O; \{\vec{i}_2, \vec{j}_2\})$.

Quelles sont les équations de C_1 et de C_2 dans ce repère \mathcal{R}_2 ?

Existe-t-il une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle les matrices des formes quadratiques q_1 et q_2 soient toutes deux diagonales ?

Exercice II

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

II.A.1 Quel est le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle définie par

$$x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-xt} \ln t \, dt ?$$

II.A.2 Quel est le domaine de définition de la fonction g de la variable réelle définie par

$$x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-xt} t \ln t \, dt ?$$

II.A.3 Etudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

II.A.4 Calculer $x f'(x) + f(x) + \frac{1}{x}$ sur son domaine de définition.

En déduire la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(1)$.

II.A.5 Pour A supérieur ou égal à 1, étudier le signe de

$$\left| \int_A^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt \right| - (A+1) e^{-A}.$$

Pour t strictement positif et inférieur ou égal à 1, donner le signe de $\frac{2}{\sqrt{t}} + \ln t$.

Pour ϵ strictement positif et inférieur ou égal à 1, a-t-on l'inégalité

$$\left| \int_0^{\epsilon} e^{-t} \ln t \, dt \right| \leq 4\sqrt{\epsilon} ?$$

Partie B

On désigne par a, b, α et β quatre constantes réelles vérifiant $a < b$ et $\alpha < \beta$.

Soit φ une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles, continue et croissante au sens large.

II.B.1 Pour n entier strictement positif, on pose $h = \frac{b-a}{n}$.

Démontrer les inégalités :

$$h \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a + kh) \leq \int_a^b \varphi(t) dt \leq h \sum_{k=1}^n \varphi(a + kh).$$

II.B.2 Quelles inégalités auraient pu être obtenues si φ avait été décroissante au sens large ?

II.B.3 En déduire en fonction de $a, b, n, \varphi(a)$ et $\varphi(b)$ une majoration de la valeur absolue de la différence entre l'intégrale $\int_a^b \varphi(t) dt$ et chacune des deux sommes finies intervenant dans les inégalités de la question II.B.1.

II.B.4 On suppose désormais que φ admet une dérivée seconde sur $[a, b]$ et qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que, pour tout t de $[a, b]$, on a

$$\alpha \leq \varphi''(t) \leq \beta.$$

Etudier le signe de la dérivée seconde de la fonction θ définie sur $[a, b]$ par la relation

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{\alpha}{2}(t-a)(b-t).$$

II.B.5 En déduire les inégalités

$$\alpha \frac{(b-a)^3}{12} \leq \frac{b-a}{2} (\varphi(a) + \varphi(b)) - \int_a^b \varphi(t) dt \leq \beta \frac{(b-a)^3}{12}.$$

II.B.6 Avec les notations précédentes, on pose

$$S = \frac{h}{2} \left[\varphi(a) + \varphi(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(a + kh) \right].$$

Donner en fonction éventuellement de a, b, n, α et β , une majoration de

$$\left| S - \int_a^b \varphi(t) dt \right|.$$

Exercice III

Soit p une constante réelle strictement positive.

III.1 Représenter la courbe \mathcal{P} d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta},$$

après en avoir étudié les éventuelles branches infinies.

III.2 Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} : il pourra être commode d'utiliser l'angle $\frac{\theta}{2}$.

III.3 Pour θ décrivant l'intervalle $] -\pi, \pi[$, on associe au point $P(\theta)$ de la courbe \mathcal{P} le point $Q(\theta)$ défini par la relation

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = p^2 \frac{\overrightarrow{OP(\theta)}}{\|\overrightarrow{OP(\theta)}\|^2}$$

et on note \mathcal{L} la courbe décrite par le point $Q(\theta)$.

Représenter la courbe \mathcal{L} .

Comparer la direction de la tangente en $P(\theta)$ à \mathcal{P} et la direction de la tangente en $Q(\theta)$ à \mathcal{L} .

III.4 Au point $Q(\theta)$ de \mathcal{L} on associe le point $R(\theta)$ défini par la relation

$$\overrightarrow{OR(\theta)} = \left(1 - \frac{p}{\|\overrightarrow{OQ(\theta)}\|} \right) \overrightarrow{OQ(\theta)}.$$

Quelle est la nature de la courbe décrite par $R(\theta)$?

III.5 On désigne désormais par \mathcal{L} la courbe fermée du plan paramétrée par θ obtenue en complétant la courbe \mathcal{L} , définie en III.3, par les deux relations $Q(-\pi) = Q(\pi) = O$.

Calculer l'aire de la surface de \mathbb{R}^2 intérieure à \mathcal{L} .

Déterminer le centre d'inertie de cette surface intérieure, supposée homogène.

III.6 A l'aide du repère canonique de \mathbb{R}^2 on définit le champ de vecteurs \vec{V} par ses deux composantes

$$V_x = (1 - e^{-x} \cos y), \quad V_y = (x - e^{-x} \sin y).$$

Ce champ de vecteurs \vec{V} dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?

Calculer la circulation de \vec{V} sur la courbe \mathcal{L} orientée dans le sens trigonométrique.