Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet de cette année avait, cette fois-ci, pour fil directeur la très classique, mais non moins très riche, sur le plan mathématique, fonction *tangente*. Après un préambule consacré à ses principales propriétés (domaine de définition, variations, existence de sa bijection réciproque *arctangente*), le problème faisait intervenir des intégrales généralisées, pour lesquelles la fonction tangente permet soit d'obtenir leur convergence, soit de les calculer. La fonction tangente vérifiant aussi une équation différentielle, il était également demandé aux candidats d'obtenir les premiers termes de son développement en série entière, où interviennent les nombres de Bernoulli.

Cette épreuve a été mieux réussie que l'année précédente, où l'on sentait l'impact du confinement de Mars 2020 et l'arrêt des cours en présence. La grande majorité des candidats a traité le Préambule, le I., une partie de III. et IV. La partie II .requérait la connaissance du produit de Cauchy, qui semble ignorée de la part de certains candidats. D'autres ont visiblement cherché à « arranger » leurs résultats, pour obtenir des expressions approchant celles qui étaient données en fin de problème. C'est hélas une mauvaise démarche.

L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. A côté, il reste toujours de très faibles copies, où même la fonction tangente ne semble pas connue (confusion avec les fonctions sinus ou cosinus, ou variantes très exotiques sans aucun rapport).

Comme les années précédentes, nous évoquons la bienveillance des correcteurs : il est fréquent d'accorder le point car le raisonnement semble correct malgré une erreur ou un problème logique. Néanmoins, nous rappelons qu'il ne faut pas non plus en abuser, dès lors que la correction devient, pour le correcteur, une épreuve de DECHIFFRAGE, doublée d'un parcours d'étapes - jeu de piste, où les questions ne sont plus traitées dans un ordre logique. Il faut éviter de naviguer entre les questions, entre les parties. Prévoir une copie par partie afin de combler les éventuelles lacunes a posteriori. L'organisation des réponses fait partie de la présentation de la copie, qui est évaluée.

L'usage d'abréviations, ou d'acronymes abscons est à proscrire : « CVA », « CIFS », « LBSDLBS », etc... ne sont pas des abréviations usuelles. Il faut aussi faire attention à l'orthographe, en particulier celle des noms propres (Riemann s'écrit avec un « R » majuscule, et prend deux « n »). La connaissance du programme passe aussi par l'apprentissage des noms des théorèmes.

D'autre part, écrire en petit un calcul faux ne le rend pas juste. Écrire l'une sur l'autre deux réponses différentes, suggérant ainsi au correcteur de choisir la bonne réponse, n'est pas non plus une bonne stratégie.

Les correcteurs rappellent qu'il faut bien lire l'énoncé : des points sont bêtement perdus par l'oubli d'une question, des réponses hors sujet... Soigner la rédaction, utiliser les bons connecteurs logiques (éviter les phrases du type : « la suite est décroissante et minorée alors elle converge »).

En ce qui concerne la présentation, si elle est globalement convenable, elle n'est pas toujours excessivement soignée non plus. Nous rappelons que les traits se tirent <u>à la règle</u>.

Remarques particulières

Préambule

1. Les correcteurs ont noté beaucoup d'erreurs sur le domaine de définition de la fonction tangente : « $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ », « $\mathbb{R}$ », ou encore « $\mathbb{R} \setminus k\,\pi, \pi \in \mathbb{N}$ », voire « $\mathbb{R} \setminus k\,\pi, \pi \in \mathbb{R}$ » sont souvent proposés. Il semble aussi que certains candidats confondent le domaine d'arrivée ($\mathbb{R}$), et celui de départ.

   Attention à l'orthographe de *tangente* qui n'est pas « tangeante ».

   Enfin, dire que « $\tan(-x) = -\tan(x)$ » ne suffit pas : il faut conclure en disant que la fonction est impaire. Par ailleurs, une fonction n'est jamais « impair ».

2. Une question de cours était très explicitement posée ici. On attendait que les candidats énoncent le théorème de la bijection, puis l'appliquent, pour montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème est pourtant rarement cité. Certains candidats mentionnent le théorème des valeurs intermédiaires.

   Lorsque le théorème est cité, l'une des deux hypothèses est souvent oubliée (continuité ou stricte monotonie).

D'autre part, le fait que la fonction tangente soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne suffit pas, il faut préciser que l'image de la fonction est bien $\mathbb{R}$, en étudiant les limites aux bornes par exemple.

Une quantité non négligeable de copies étudie le ≪ noyau ≫de la fonction tangente, en précisant que sa ≪ dimension ≫ est nulle ...

En ce qui concerne la dérivée de la fonction arctangente, elle apparaît comme bien connue.

3. Il s'agissait, dans cette question, de faire le lien entre les variations de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et celles de sa réciproque arctangente, puis de retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée de la fonction arctangente obtenue à la question précédente.

   Ce lien est rarement bien exprimé. D'autre part, un tableau de variation n'est pas suffisant pour répondre à la question. Il faut un minimum de rédaction autour ...

4. On demandait, ici, de tracer, sur un même graphe, les courbes représentatives de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, en rappelant comment le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente se déduit de celui de la fonction tangente.

   Certains candidats ne respectent pas l'échelle demandée. D'autres se contentent d'un schéma approximatif dans le corps de la copie, alors que du papier millimétré est fourni. D'autre part, les deux courbes se coupent trop souvent en trois points.

   Il faut aussi préciser quelle courbe correspond à quelle fonction.

   Enfin, une asymptote n'est pas la fonction : les courbes se finissent parfois par des droites ...

   En ce qui concerne la symétrie par rapport à la première bissectrice, elle n'est pas toujours précisée. Nous rappelons également que si la symétrie par rapport à la première bissectrice est évoquée, il est judicieux de la représenter sur le graphique. Les correcteurs ont trouvé d'autres variantes exotiques : rotations de $\frac{\pi}{4}$, ≪ retournements de courbe ≫, ≪ inversion d'axes ≫ (ce qui ne correspond pas à une transformation géométrique), etc ...

   Il faut aussi bien lire l'énoncé : il était demandé de réaliser les deux courbes dans un même repère.

Enfin, nous rappelons qu'il ne faut pas confondre la fonction avec sa courbe représentative (le symétrique d'une fonction n'existe pas).

5. La majorité des candidats a réussi à montrer que, pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,

$$1 + \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Partie I

1. (a) Cette première question demandait d'étudier, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale à paramètre $F(x)$. Beaucoup de candidats ont eu recours, de façon abusive, au théorème de continuité des intégrales à paramètres, qui n'était absolument pas nécessaire (d'où l'importance de bien lire la question).

   Si la plupart des candidats écrivent que, lorsque le réel t tend vers l'infini,

   $$\frac{1}{1+x^2+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$$

   tous ne concluent pas correctement à la convergence de l'intégrale donnée. Certains se contentent de dire que « par Riemann, cela converge », sans préciser où ! Parfois, on trouve « $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ », ce qui laisse une très forte ambiguïté, quand, en même temps, de nombreux candidats écrivent que « $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ». Ou alors, ils se contentent d'écrire que « $\frac{1}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente ».

   (b) Le calcul de $F(0)$ a été bien effectué dans l'ensemble. Quelques candidats écrivent « $\lim_{X \to +\infty} [\arctan t]_{-X}^{X}$ ».

   Pour beaucoup d'autres : « $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 0$ ». Ce résultat aurait pourtant dû déclencher un signal d'alarme : la fonction intégrée est strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$. Son intégrale ne peut donc pas être nulle...

   (c) L'expression, pour tout réel x, de $F(x)$ en fonction de x, n'a pas toujours été donnée par les candidats. Certains ont voulu appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, sans que cela conduise à quoi que ce soit.

2. (a) Il s'agissait, ici, de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que la série $\sum \dfrac{\pi}{\sqrt{1+(n\,\pi)^{\alpha}}}$ converge.

Beaucoup de candidats répondent « $\alpha > 2$ » sans aucune justification. D'autres réutilisent la lettre α pour citer le résultat du cours sur les séries de Riemann, rendant leur réponse difficilement compréhensible.

Beaucoup (trop) de copies assurent que « $\sum u_n$ converge si, et seulement si, (u_n) tend vers 0 ».

Enfin, de nombreux candidats perdent du temps à étudier le cas où le réel α est négatif, montrant leur lecture inattentive du sujet.

Certains candidats ont voulu utiliser le critère de d'Alembert, qui apparaît comme mal maîtrisé, et n'était pas du tout adapté à cette question.

(b) Pour montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{n+1} \leq J_n \leq I_n$$

beaucoup de candidats ont voulu recourir à des arnaques, ou des affirmations absolument injustifiées (comme quoi la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^{\alpha}\,\sin^2 t}$ serait décroissante ...)

Les justifications sont souvent absentes dans les inégalités entre intégrandes (fonction inverse strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ ...)

Des symboles comme $\Leftrightarrow$ sont utilisés à tort, par exemple en intégrant.

Enfin, la justification du passage sur $[0,\pi]$ est souvent omise, le candidat se contentant de conclure comme s'il n'y avait pas de problème.

(c) A l'aide du changement de variable $\dfrac{1}{\tan t} = u$, il fallait montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\,\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Cette question a été plutôt bien traitée, même si certains candidats concluent trop rapidement, alors que le résultat est donné dans l'énoncé. Le changement de variable est rarement bien justifié.

Nous signalons que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\tan t}$ n'est pas définie pour $t = \dfrac{\pi}{2}$. D'autre part, beaucoup trop de copies assurent, sans aucune vérification, que le changement de variables est de classe C^1 et strictement monotone.

D'autres essayent d'obtenir le résultat demandé à l'aide de tours de passe-passe (nous rappelons que si le correcteur ne comprend pas, il ne pourra pas mettre les points : l'essence des mathématiques, c'est quand même la preuve ...), quand ils n'adaptent pas leur réponse à ce qui est attendu, sans vérifier la cohérence de ce qu'ils écrivent : non, lorsque le réel t tend vers zéro, $t \mapsto \dfrac{1}{\tan t}$ ne tend pas vers moins l'infini.

(d) Cette question a été bien traitée par les candidats ayant trouvé l'expression de $F(x)$.

(e) Il fallait, ici, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ converge.

Pour cette question, sans doute l'une des plus difficiles du sujet, nous avons (encore) trouvé quelques tentatives « d'arnaque » du correcteur : « $\alpha > 1$ car ce sont des intégrales de Riemann », par exemple).

Les candidats ayant traité la question ont vu le lien avec la série de terme général u_n. Très peu de copies précisent que la convergence de la suite $\displaystyle\int_0^{n\pi} f(t)\,dt$ ne suffit pas à conclure à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Partie II

1. (a) Très peu de candidats connaissent le produit de Cauchy : les correcteurs ont vu tout et n'importe quoi ...

Nous rappelons qu'il faut faire attention à bien se relire : « $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n\, b_{n-k}$ », est peut-être une erreur d'inattention, mais est sanctionné.

De même, pour le rayon de convergence, qui semble très peu connu des candidats.

Certains candidats ont visiblement retrouvé le résultat, à l'aide du produit de Cauchy pour les séries numériques : les correcteurs ont trouvé, à de nombreuses reprises, des expressions de la forme « $f(x)\,g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\, x^k\, x^{n-k}$ », ce qui est juste bien sûr, il est juste dommage que les candidats ne pensent pas à simplifier le produit $x^k\,x^{n-k}$.

Nous signalons un problème de lecture de l'énoncé : les notations et les informations données dans le texte ne sont pas respectées (réutilisation de R pour le rayon de la série produit).

Enfin, nous avons aussi trouvé beaucoup de tentatives d'escroquerie dans cette question : des candidats ayant vu ce qui figurait à la fin du sujet font apparaître des soi-disant produits de Cauchy avec des expressions de la forme
« $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, b_{n-k}$ », « $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n\, b_{n-k}$ », ou encore « $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_n\, b_{n-k}$ », etc ...

(b) Cette question, où l'on demandait d'exprimer, pour tout réel x de $]-R, R[$, le développement en série entière de $\big(f(x)\big)^2$, a été bien traitée par la majorité des candidats ayant bien répondu à la question précédente. Pour les autres, nous avons encore trouvé des expressions très exotiques, de la forme
« $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\, x^n$ », « $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\, x^{2\,n}$ », etc ..

2. (a) On demandait, ici, de donner la relation de récurrence vérifiée, pour tout entier naturel n, par les coefficients a_n.

Cette question a été bien traitée par une partie seulement des candidats ayant bien répondu à la question précédente. Beaucoup de candidats n'ont pas pensé à utiliser l'unicité du développement en série entière, et donc ne donnent pas la relation de récurrence. Certains parlent de « polynômes », et non de séries. Certains encore ne semblent pas voir compris ce qui est manipulé, les correcteurs ont trouvé des relations de la forme « $(n+1)\,a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$ », etc ..

(b) On attendait, dans cette question de démontrer, par récurrence forte, que, pour tout entier naturel p :

$$a_{2\,p} = 0$$

La récurrence est souvent mal rédigée. Par contre, la conclusion sur l'imparité de la fonction f est souvent bien mentionnée.

(c) Ici, la valeur de $f'(0)$ a souvent été calculée à partie de l'équation différentielle.

En revanche, les coefficients a_1, a_3, a_5, a_7 n'ont été que très peu calculés correctement. En particulier, de nombreux candidats refusent de calculer 45×7.

Un nombre non négligeable de candidats obtiennent, de façon ≪ magique ≫, les bonnes valeurs de ces coefficients, en contradiction complète avec les formules fausses qu'ils ont obtenues auparavant.

Il y a, aussi, et à nouveau un problème de lecture de l'énoncé : beaucoup de candidats peinent à justifier le fait que $f(0) = 0$, alors que cela figure quelques lignes plus haut.

(d) Il s'agissait ici de faire le lien entre les résultats précédents, et le développement limité, à l'ordre 7, au voisinage de zéro, de la fonction tangente, au même ordre, en zéro.

Très peu de candidats ont expliqué pourquoi le développement en série entière donne le développement limité en 0 (qui est une notion locale).

Certains candidats ont bien noté que la fonction tangente vérifiait l'équation différentielle, mais ont oublié de préciser que $\tan(0) = 0$.

D'autres ont conclu à l'égalité entre la fonction f et la fonction tangente à l'aide du théorème de Cauchy du cours, alors qu'il ne s'applique pas dans ce cas.

Certains enfin n'ont absolument pas vu le lien avec les questions précédentes, et se sont contentés de calculer le développement limité de la fonction tangente, en zéro.

Partie III

1. (a) On demandait, ici, d'étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale $H_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\,du$.

Cette question a été globalement bien traitée, même si les correcteurs ont retrouvé le même type d'erreurs ou d'imprécisions qu'à la première question de la Partie I : ≪ par Riemann, cela converge ≫, sans préciser où, ou alors, ≪ $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{du}{u^{2n}}$ converge ≫, ce qui laisse une très forte ambiguïté, quand, en même temps, de nombreux candidats écrivent encore que ≪ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2n}}$ converge ≫, ou se contentent d'écrire que « $\frac{1}{u^{2\,n}}$ est une intégrale de Riemann convergente ».

Nous avons aussi noté de grosses erreurs (règles de calcul sur les puissances), comme : « $\frac{u^{2\,n}}{1+u^{4\,n}} \sim \frac{u^{2\,n}}{u^{4\,n}} = \frac{1}{u^2}$ ».

Il y a aussi, souvent, une étude inutile en 0 (la fonction y est continue), ou une conclusion trop rapide : il faut préciser que $2\,n > 1$.

Enfin, conclure que « H_n converge si, et seulement si $n > \frac{1}{2}$ » montre une lecture trop hâtive de l'énoncé : le candidat n'utilise pas le fait que n est un entier naturel non nul.

Certains candidats n'ont visiblement pas du tout compris la question, ils ont voulu étudier la convergence de la série de terme général H_n.

(b) Dans cette question, plutôt facile, on demandait de calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2\,n}\,du$.

Si cette question a été globalement bien traitée, certains candidats semblent ignorer que $1^{2n+1} = 1$. D'autres font des erreurs au niveau du calcul de l'intégrale, en écrivant par exemple « $\int_0^1 u^{2\,n}\,du = \left[\frac{u^{2\,n+2}}{2\,n+2}\right]$ », etc ...

(c) Très peu de candidats ont su calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2\,n}}{1+u^{4\,n}}\,du$.

Beaucoup ont voulu passer à la limite sous le signe intégral, ce qui n'est pas possible dans le cadre du programme.

(d) Pour déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = 0$, encore fallait-il avoir traité celles-ci ... Le recopiage/exploitation de l'énoncé ne suffisait pas.

2. (a) La réponse attendue dans cette question, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[2\,n]{x} = 0$, a est souvent été donnée sans preuve. Il fallait, au moins, préciser que $\frac{1}{2n} > 0$ ou, mieux, repasser à la forme exponentielle, et mentionner la composition de limites. En redéfinissant la racine $n^{ième}$ sous cette forme, on attendait, bien sûr, de redémontrer ce résultat de cours.

(b) Les candidats ont souvent bien utilisé la question précédente pour étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan x}\, dx$.

Par contre, des erreurs montrent le manque d'habitude dans le traitement d'intégrales impropres avec des bornes qui ne sont pas infinies.

Signalons que l'intégrale L_n, pour n dans $\mathbb{N}^\star$, ne pouvait pas diverger, puisque les questions suivantes demandaient d'étudier la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$. C'est là encore un problème de lecture d'énoncé.

(c) Dans cette question, on demandait de montrer que la suite $(K_n)_{n, \in \mathbb{N}^\star}$ était croissante et majorée.

Les correcteurs ont trouvé de (très) nombreuses tentatives d'arnaque, notamment, sur les variations de la suite des intégrandes. Il fallait repasser à la forme exponentielle et préciser que l'appartenance de x à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ implique $\tan(x) \in [0, 1]$, et donc $\ln \tan(x) \leq 0$, ou, au moins discuter du fait que $\tan(x) \in [0, 1]$.

Mentionnons aussi des « dérivées de suites ».

Certains candidats écrivent que « (K_n) est croissante, de plus on a montré en 2 (b) que K_n converge, donc (K_n) est majorée ». Ceci montre une confusion grave entre la notion de convergence de suites et celle de convergence d'intégrales. Il y a aussi eu beaucoup de confusions entre les variations de la fonction tangente et celles de la suite d'intégrales, certains candidats écrivant que « *tan* est croissante donc (K_n) est croissante »).

Des dizaines de copies ont assuré qu'un quotient d'intégrales est égal à l'intégrale du quotient des intégrandes, quand d'autres donnent un résultat équivalent sur les produits.

Un petit nombre de candidats a, visiblement, une très bonne compréhension « intuitive », et essayent de démontrer « avec les mains » le résultat. C'est une bonne démarche, mais elle ne remplacera jamais un vrai raisonnement mathématique ...

(d) Concernant l'étude du sens de variation de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, nous faisons des remarques similaires à celles de la question précédente.

(e) Beaucoup de candidats ont bien montré la minoration demandée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star : \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\, dx \geq \frac{\pi}{4}$$

Par contre, les correcteurs ont quand même trouvé de nombreuses réponses fantaisistes ...

(f) La convergence de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ a généralement été plutôt bien traitée. Quelques candidats ont affirmé que la limite était égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

Par contre, très peu de candidats justifient la convergence de la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et écrivent donc, sans justification, l'égalité « $\lim\limits_{n\to+\infty}(L_n+K_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}L_n+\lim\limits_{n\to+\infty}K_n$ ».

3. (a) On demandait ici, pour tout entier naturel non nul n, d'effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x=u^{2\,n}$ dans l'intégrale (K_n+L_n). Le but était d'obtenir la relation

$$K_n+L_n=2\,n\,H_n$$

Alors que l'énoncé le demandait explicitement, peu de candidats ont justifié le changement de variables. En particulier, la fonction tangente n'est pas de classe C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$! La justification du caractère C^1 bijectif du changement de variables n'a quasiment jamais été bien traitée.

(b) On demandait ici de déduire des questions précédentes l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n\sim\frac{H}{n}$$

Cette question a été bien traitéé par les candidats ayant bien répondu à la - précédente. Peu de copies ont précisé que $H\neq 0$ et que l'on peut donc écrire l'équivalent.

Partie IV

1. La majorité des candidats ont démontré que la fonction ϕ est prolongeable par continuité en zéro.

2. La majorité des candidats a donné la bonne valeur du coefficient B_0. Par contre, il manque souvent les justifications !

3. Les candidats connaissant le produit de Cauchy ont plutôt bien traité cette question, malgré de nombreuses tentatives d'escroquerie du correcteur concernant le fait que la somme commence à 1. Ce ne sont pas des démarches payantes en termes de points.

4. (a) Pour montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

peu de candidats ont mentionné l'unicité du développement en série entière. Certains parlent d'unicité dans les polynômes. Les correcteurs ont aussi trouvé des argumentations complètements fausses – par exemple, une évaluation en zéro, sauf que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{0^n}{n\,!} = 0$$

ce qui ne permet donc pas de conclure à la nullité de chacun des coefficients $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k$.

Par contre, la seconde partie a souvent été bien traitée.

(b) Très peu de candidats ont correctement calculé $2\,B_2$ et $4\,B_4$.