MATHEMATIQUES A.

Présentation générale :
Le sujet de cette année consistait en un problème d'algèbre et de probabilités. Ce problème était composé de 3 parties, les deux dernières utilisant certains résultats de la première.
La première partie consistait à calculer les puissances d'une matrice sysmétrique réelle en la diagonalisant, la seconde étudiait un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ puis s'intéressait aux droites vectorielles ayant le même orthogonal pour 2 produits scalaires différents.
Enfin, la troisième partie abordait les probabilités : lois usuelles, chaîne de Markov, fonctions génératrices... ainsi qu'un peu de PYTHON
Les parties I et III du sujet étaient très proches du cours et du type d'exercices que les candidats ont rencontrés pendant leurs deux années de CPGE.
La seconde partie était plus difficile.
Le barème se répartit équitablement entre algèbre d'une part et probabilités d'autre part.
L'épreuve a parfaitement permis de classer les candidats.

Présentation des copies :
La présentation des copies laisse toujours à désirer cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures, résultats non encadrés, questions ou parties non numérotées, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier une phrase écrite dans l'énoncé, usage abusif d'abréviations...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, moins d'un candidats sur sept a obtenu tous les points de présentation et un sur deux n'en a obtenu aucun.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidats. Ces copies sont valorisées.

Rédaction :
Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à l'arnaquer.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Par ailleurs, il était possible dans ce problème de vérifier très rapidement la cohérence de nombreux résultats obtenus.
Nous invitons les candidats à le faire et en cas d'incohérence, à reprendre leurs calculs ou au minimum à indiquer au correcteur pourquoi ils pensent que leurs résultats sont faux.

Première Partie

1. La majeure partie des candidats a reconnu une matrice symétrique, malheureusement, un candidat sur 5 oublie de préciser qu'elle est à coefficients réels.
   De plus les candidats sont invités à respecter l'orthographe de « théorème spectral ».
2. Question largement réussie par les candidats. Un simple calcul de trace aurait permis de corriger les quelques erreurs rencontrées.
   Des confusions (ainsi que dans la question suivante) entre « $=$ », « $\Leftrightarrow$ » et « $\underset{L}{\sim}$ ».
   Enfin, les phrases « les valeurs propres de A sont 1, 2 et 4 » et « L'ensemble des valeurs propres (ou le spectre) de A est $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ » sont correctes mais pas la phrase « les valeurs propres de A sont $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ ».
3. Les valeurs des sous-espaces propres doivent être justifiées et les systèmes résolus par équivalence.
   La matrice P n'est pas orthogonale dans deux copies sur trois.
   Il n'est pas rare de constater des confusions entre vecteurs-ligne et vecteurs-colonne avec des produits qui n'existent pas : $X = (x, y, z) \in E(1) \Leftrightarrow AX = X$.... donc $E(1) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. On attendait ici une démonstration par récurrence. Le procédé semble acquis par un grand nombre de candidats.
   Les initialisations sont souvent mal rédigées, et parfois faites pour $n = 1$ au lieu de $n = 0$.
   On note aussi la présence de quelques $\forall n \in \mathbb{N}$, dans $\mathcal{P}(n)$.
   Enfin, des candidats parlent de « la propriété » sans que celle-ci ait été définie.
5. Les calculs intermédiaires doivent impérativement figurer sur la copie !
   Pour une raison inconnue, de nombreux candidats qui disposent de P, D^n et P^{-1} (qu'ils ont parfois calculé) ne font pas le calcul PD^nP^{-1}.
   De nombreuses erreurs de calcul auraient pu être rectifiées en remarquant que la matrice A^n aurait dû être symétrique ou en remplaçant n par 0 ou 1.
   Bien qu'utile en partie III, la valeur de A^n n'avait pas été donnée pour éviter que la correction de cette question se résume à une chasse aux arnaques...
6. Beaucoup d'affirmation dans cette question qui n'a pas toujours été comprise, en particulier, on a souvent « A' n'est pas symétrique car le théorème spectral n'est pas une équivalence ».
   Certains candidats essayent de démontrer que la matrice est orthogonale (${A'}^tA' = I$).

Deuxième Partie.

1. (a) Les candidats ont presque toujours oublié de justifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors que beaucoup en auraient eu besoin pour démontrer la symétrie.
   Celle-ci est d'ailleurs souvent une tentative d'escroquerie, les transposées apparaissant ou disparaissant suivant les besoins.
   Les candidats ont privilégié la linéarité à gauche, avec des confusions entre « linéarité » et « distributivité » alors que la linéarité à droite était plus simple.

   (b) La formule de changement de base n'est maîtrisée que par un peu moins de la moitié des candidats. La nouvelle base devait être précisée, ce qui n'a pas toujours été le cas. On rencontre également quelques projections ou des dérivées...

   (c) Question relativement bien réussie.

   (d) Les candidats savent généralement ce qu'ils doivent démontrer mais ce n'est pas toujours bien fait.
   En particulier, si $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,u) > 0$ alors l'équation $\varphi(u,u) = 0$ ne peut pas avoir de solution.

2. (a) De nombreux candidats s'arrêtent à $< u\,; v >= 0$. En fait, ils ont souvent redémontré que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.
   Certains ont voulu utiliser les expressions des vecteurs propres obtenus dans la partie I. Cela était parfaitement possible, condition de tester les 3 couples possibles et pas uniquement 1 seul.

   (b) Question totalement ratée. Rares sont les candidats qui ont pensé à normer les vecteurs à l'aide de la norme associée au produit scalaire φ et parmi ceux-ci, certains ont utilisé l'expression de la question 1.(c).
   De plus, certains candidats veulent utiliser le produit vectoriel qui ne peut pas fonctionner avec le produit scalaire φ. On voit également de rares tentatives pour orthonormaliser la base canonique.

3. Très peu de candidats ont pensé à utiliser la question 2.
   On trouve dans les démonstrations proposées des simplification par λ sans que les candidats s'assurent que celui-ci est non nul.

4. (a) Les réponses sont parfois inutilement compliquées. Par ailleurs, il est demandé une base et répondre $F_i = Vect(j,k)$ n'est pas conforme à cette demande.
   Cette question ainsi que la précédente a été traitée par environ les deux tiers des candidats.
   A partir de la question suivante, plus de la moitié des candidats s'est abstenue.

   (b) Question peu réussie. On trouve parfois des bases contenant 3 vecteurs ou le vecteur nul.
   Des candidats calculent $f(j)$ et $f(k)$ ou déterminent les coordonnées de j et k dans une autre base...

   (c) $F_i \neq F_i'$ est souvent affirmée, bien plus rarement justifiée.
   Les candidats ayant répondu aux questions précédentes, ont généralement trouvé l'intersection.
   Les correcteurs ne sont pas contre le fait que les candidats leur fournissent des arguments de géométrie : « l'intersection de 2 plans (de $\mathbb{R}^3$) sécants non confondus est une droite ».

5. Ces deux questions ont été bien traitées dès lors que les candidats ont constaté que $\varphi(u,v) =< u\,;\, f(v) >$.
Les démonstrations manquent parfois d'efficacité car la symétrie du produit scalaire n'est pas ou mal exploitée.

6. Ces deux questions sont très peu réussies.
Les démonstrations proposées sont souvent confuses : quelle est l'hypothèse ? quel est l'objectif ?
Les inclusions se transforment en égalité (quand elles ne changent pas plusieurs fois de sens).
On ne peut pas faire le produit scalaire d'un vecteur et d'un espace vectoriel et il n'est pas possible d'avoir $u \in F_u$.
On trouve également $AU = 0 \Rightarrow U = 0$ car $A \neq 0$...

Troisième Partie : Jouons au golf.

1. (a) Comme on pouvait s'y attendre, les correcteurs ont trouvé de nombreuses lois géométriques (au paramètre souvent non précisé et à l'univers image faux) mais aussi quelques lois normales (!), équiprobables ou binomiales.
Donner la loi d'une variable aléatoire consiste à donner son univers image ainsi que les probabilités $P(X = k)$ associées.
Ici, on n'a pas toujours l'univers image. Quant aux probabilités, elles doivent être soigneusement justifiées (un arbre peut aider mais ne suffit pas) à l'aide de formules du cours (ici probabilités conditionnelles).
Par ailleurs, les candidats sont invités à vérifier que la somme des probabilités obtenues est égale à 1.

   (b) Les formules de l'espérance et de la variance de la loi uniforme (ou géométrique) sont relativement bien connues... sauf que certains candidats ne remplacent pas n, p par leurs valeurs...
Le ≪ en déduire ≫ n'excluait pas un calcul puisque ce calcul utilisait une partie de la réponse à la question précédente.
Enfin, l'interprétation de la valeur de l'espérance aurait dû permettre aux candidats de détecter une erreur : $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{3}$ et même 1 et 3 ne pouvaient pas être possibles... de même qu'une variance négative (la formule de Koenig-Huygens n'est pas toujours maîtrisée).

2. (a) La plupart des candidats ont identifié une loi binomiale pour laquelle, on souhaiterait avoir le nom complet, plutôt qu'une notation ou abréviation. Sauf que :
* L'indépendance des expériences de Bernoulli est peu mentionnée et/ou justifiée ;
* Le lien entre J et les expériences précédentes n'est pas toujours donné ;
* Les valeurs des paramètres sont souvent fausses : $n = 48$, $p = \frac{1}{11}$... Les candidats sont d'ailleurs invités à simplifier les fractions.
* Il en est de même pour l'univers image : oubli de 0 (entre autres) et $[0\,;\,36]$ au lieu de $[\![0\,;\,36]\!]$.
* Les probabilités ont perdu le coefficient binomial ou gagné une somme.
Les candidats sont invités à définir q.

(b) La moitié des candidats savent qu'on leur demande l'espérance et en connaissent (ou savent retrouver) l'expression.

3. (a) Il semble que la loi de Poisson (avec une majuscule !) soit la mieux maîtrisée par les candidats.

(b) Ceux qui connaissent l'espérance de la loi de Poisson ont donné une valeur correcte pour $P(J' = 9)$.
Quelques erreurs pour $P(J' \geqslant 1)$, en particulier mauvaise gestion du premier terme dans le développement en série entière de e^x.

(c) Pour les 40% de candidats qui savent ce qu'est la fonction de répartition, on note 2 erreurs : $P(J' = 7) = P(J \leqslant 8) - P(J' \leqslant 7)$ et $P(X \geqslant 10) = 1 - P(J' \leqslant 10)$ ou $P(X \geqslant 10) = P(J' \leqslant 13) - P(J' \leqslant 9)$.

4. (a) Les valeurs sont (presque) toujours justes mais (quasiment) jamais justifiées et encore moins correctement.

(b) Cette question n'a pas posé de problème aux candidats ayant respecté les consignes de l'énoncé.
A noter que ces justifications devraient être données spontanément par les candidats sans qu'il soit nécessaire de les réclamer.

(c) La formule des probabilités totales est relativement bien connue des candidats, par contre, le système complet d'événements fait souvent défaut.
Quelques candidats ont essayé de justifier que (A_n, B_n, C_n) est bien un système complet d'événements (ce n'était pas un attendu de la question)... rarement avec succès.

(d) Cadeau de l'auteur du sujet aux candidats.

(e) Quelques $G_{n+1} = 4AG_n$ ou $G_{n+1} = AG_n$ et quelques produits qui n'existent pas mais finalement 70% de bonnes réponses : $G_{n+1} = \dfrac{1}{4}AG_n$.

(f) Un petit peu plus d'un candidat sur 3 a fait l'impasse sur cette question PYTHON.
Les candidats avaient l'entière liberté d'utiliser les résultats des questions (b) et (c) ou de la question (e) (voire même de la question g). Les candidats peu à l'aise avec le calcul matriciel avaient donc intéret à utiliser les questions (b) et (c).
Quelques remarques :
  * Il n'était pas demandé d'écrire une fonction ;
  * Il était demandé b_{20} par b_n, ni G_n, ni G_{20}, ni a_{20}, ...
  * On note des confusions entre `range(n)`, `range(n+1)`, `range(n-1)`, `range(1,n)`...

Ceci dit, de nombreux programme qui ne fonctionnent pas auraient facilement pu être corrigés si le candidat avait pu faire des tests.

(g) On trouve beaucoup plus de produits qui n'existent pas qu'à la question (e), en particulier chez les candidats parlant de suites géométriques...

(h) Dans cette question, quelques candidats ont calculé A^n en élevant tous les coefficients de A à la puissance n !
D'autres ont fait tous les calculs avec a_0, b_0 et c_0 sans les remplacer par leurs valeurs (ou alors quand les calculs étaient finis)...

(i) Les limites ne sont que très rarement (correctement) justifiées. L'incohérence de leur valeur pas mise en évidence.
L'interprétation est souvent oubliée ou incorrecte.

5. (a) Un minimum de justification est attendu ! Comme dans toutes les questions (sauf indications contraires)

(b) Un petit tiers des candidats donne la bonne réponse.
On trouve également régulièrement $(T = n) = S_k$ sans précision sur k.

(c) La formule des probabilités composées semble bien peu connue des candidats. Certains préfèrent un bien peu précis ≪ par indépendance ≫ alors qu'il n'y a aucune ambiguïté dans l'énoncé sur le fait que p_n est défini comme une probabilité conditionnelle.
De nombreux candidats proposent $P(T = n) = \dfrac{1}{n+1}$ sans remarquer qu'il s'agit du terme général d'une série divergente.

(d) Beaucoup de candidats ont compris qu'il s'agissait de $P(T \leqslant 20)$ mais en l'absence de (bonne) réponse à la question précédente, ne sont pas allés plus loin.
Quelques erreurs dans le calcul de cette somme télescopique.

(e) Les candidats semblent d'accord sur le fait qu'il s'agisse d'une limite... par contre, nous avons l'embarras du choix quant à la suite considérée (qui n'est généralement pas justifiée par le candidat).
Quelques candidats n'ont pas lu ou compris la définition de l'événement $(T = 0)$.

(f) i. La série est souvent mal écrite à cause de son premier terme.
Le critère de d'Alembert est mal utilisé : il manque les valeurs absolues et même parfois la limite.

ii. Les changements d'indice et les termes manquant pour identifier $-\ln(1-x)$ ont souvent conduit à une réponse fausse.
Les candidats ayant tenté une double intégration se sont souvent perdus en chemin.

(g) Beaucoup de bêtises concernant la dérivabilité de G que cela soit en 0 ou en 1. De nombreux candidats disent que $G(1)$ n'existe pas (car on ne peut pas remplacer x par 1).
Il était beaucoup plus simple de s'intéresser à la série de terme général $nP(T = n)$.