MATHEMATIQUES B

Présentation générale :

Le sujet de cette année se composait de quatre parties largement indépendantes, le gradient et la fonction $\Phi_{\vec{u}}$ servant de fil conducteur. Il permettait de parcourir une large partie du programme de PTSI-PT : applications linéaires, calcul matriciel et réduction, coniques, surfaces de $\mathbb{R}^3$ et plans tangents et conformément au cahier des charges, fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En contrepartie, le sujet était sans doute un peu long.
Les résultats sont contrastés. Les questions de cours n'ont pas le pourcentage de réussite que l'on devrait trouver.
On trouve cette année un nombre très important de copies très faibles, en particulier 9% des copies ont obtenu moins de points que le total de points accordé aux deux questions de cours.
On trouve également d'excellentes copies ayant traité avec succès 80% du sujet.

Nous rappelons aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Présentation des copies :

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.

Les correcteurs ont constaté une nette dégradation concernant la présentation des copies, dégradation qui n'est pas due uniquement à l'interdiction du « blanco ». 6 candidats sur 10 n'ont pas jugé utile d'obtenir les points attribués à la présentation de leur copie...

Pour les obtenir, il est nécessaire de respecter les consignes simples suivantes :

- $\rightsquigarrow$ L'écriture doit être soignée : hiéroglyphes et pattes de mouche sont à proscrire. Dans certaines copies, il est impossible de faire la différence entre « 1 », « 2 », « z », et « Z », ou entre « f » et « F »...

- $\rightsquigarrow$ Les numéros des parties et des questions doivent apparaître clairement.

- $\rightsquigarrow$ Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ à la <u>règle</u> : dans nombre de copies, trouver quel est le résultat et où il est, s'apparente à un jeu de piste.

- $\rightsquigarrow$ Les candidats doivent éviter les ratures. Ils savent désormais que l'usage du « blanco » est interdit, et convient d'apprendre à utiliser une feuille de brouillon.

- $\rightsquigarrow$ L'orthographe des mots doit être respectée, en particulier lorsqu'ils figurent dans l'énoncé : tangent, Schwarz, parallèle, ellipse, ...,

- $\rightsquigarrow$ La grammaire ne doit pas être maltraitée : accords genre et nombre, temps de conjugaison (en particulier : participe passé, infinitif et imparfait), confusion entre les natures des mots (« calcul » et « calcule », « sont » et « son », « or » et « hors »...)...

Rédaction :

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent respecter les notations de l'énoncé.
S'ils ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

Tous les résultats doivent être justifiés. Cette année, beaucoup de candidats confondent démonstrations et affirmations.

Ce sujet a également mis en évidence une manque de compréhension dans l'usage des « si ... alors ... » et dans celle des « $\Leftrightarrow$ ».
Rappelons que pour que la résolution d'une équation soit complète, il convient de la résoudre par équivalence (ou double implication).

Le vocabulaire mathématique est également souvent imprécis : « S est engendrée par $\vec{u}$ », la tangente et le plan tangent sont deux objets différents tout comme le coefficient et le (un) vecteur directeur d'une droite, « f' » ne s'utilise pas pour des fonctions de plusieurs variables, sans parler de ceux qui font le produit scalaire (ou vectoriel) ou qui évoquent l'indépendance linéaire de deux réels.
De plus, les propriétés de continuité, dérivabilité sont des propriétés locales. Il convient de préciser le lieu où elles sont vérifiées.

Les identités remarquables ne sont pas toujours bien connues. Quant aux racines carrées... $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ et $\sqrt{12}$ ne sont pas toujours remplacés par 1, 2 et $2\sqrt{3}$. $(\sqrt{3})^2$ n'est pas toujours égal à 3...
Les solutions de l'équation $X^2 = \alpha$ ($\alpha > 0$) et $X^2 = -1$ se limitent régulièrement respectivement à $\sqrt{\alpha}$ et i.
Pour finir, les réponses doivent rester dans le cadre du programme : les cylindres n'y figurent pas. Même si nous sommes ravis de constater que les candidats ont bien visualisé la surface S de la troisième partie (ou qu'ils ont lu le commentaire en fin de sujet), nous ne pouvons valider les propriétés (régulièrement fausses) que les candidats leur prêtent, leur vision du cylindre se limitant au cylindre de révolution.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie.

Première Partie.

1. De nombreux candidats n'ont pas remarqué que le terme important dans la définition de F était ≪ continues ≫ et nous sommes souvent invités à croire les candidats sur parole lorsque qu'il nous disent que φ est à valeurs dans F.
   Par ailleurs, que le gradient soit noté φ, ∇ ou $\overrightarrow{\text{grad}}$, le gradient reste le gradient et on ne peut pas justifier qu'il est linéaire par ≪ car le gradient est linéaire ≫.
   Le recours très fréquent à cette justification (quand on en trouve une...) semble masquer soit que le candidat ne sait pas ce qu'il doit démontrer, soit que le candidat sait ce qu'il doit démontrer mais ne sais pas comment faire, soit qu'il ne connaît pas la définition du gradient...
   Il est d'ailleurs inquiétant de trouver autant de candidats qui ne connaissent pas la définition du gradient puisque cet opérateur est très utile en sciences physiques ou en sciences industrielles. Il est régulièrement confondu avec $\Phi_{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$, avec le laplacien ou le rotationnel. Il arrive même que le gradient change de définition entre la partie algèbre et la partie géométrie !
   On voit également des confusions avec la définition d'un (sous-)espace vectoriel. Si $\varphi(0) = 0$ est juste mais inutile, un minimum de réflexion sur la nature des objets manipulés devrait éviter aux candidats d'écrire $0 \in \varphi$ ou φ est non vide.
   Enfin, c'est φ qui est linéaire et $\varphi(f)$ qui est continue (et non l'inverse...).

2. Sans doute parce qu'il est vu dans les autres matières, on trouve souvent (y compris dans des mauvaises copies) que le noyau est l'ensemble des fonctions constantes mais sans justifications (y compris dans des bonnes copies).
   Signalons que le fonction nulle est une fonction constante, que les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition et que E et F ne sont pas de dimension finie. Par ailleurs lorsque l'on dit que le noyau est (ou n'est pas) nul, il convient d'utiliser $\{0\}$ et non 0.
   Le lien avec l'injectivité (quand il est fait) est souvent correct.

3. (a) Quelques inégalités de Cauchy-Schwarz (plus ou moins fantaisistes). Seulement

42% de succès pour cette question de cours.

(b) Beaucoup de candidats utilisent le résultat précédent sans dire et encore moins justifier de f est de classe $\mathcal{C}^2$.
A noter : a priori, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et non $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4. (a) Pour les candidats qui utilisent le résultat précédent, la majorité se contente de constater que $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sans justification.
Pour ceux qui essayent de résoudre l'équation $\nabla f = V$, voir ci-dessous.
Le lien avec la surjectivité (quand il est fait) est souvent correct.

(b) Il y a ceux qui donnent des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, il y a ceux qui oublient les « constantes d'intégration », ceux qui ne donnent pas pas la bonne nature à ces « constantes », ceux chez qui tout se simplifie par magie.
Les raisonnements corrects qui arrivent au bout sont généralement difficiles à suivre faute d'explications (fonctions qui perdent des variables) et il manque souvent la réciproque des « donc ».
Signalons enfin que les opérations simultanées $\text{Ł}_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\text{Ł}_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $\text{Ł}_3 \leftarrow L_3 - L_1$ transforment un système en un système non équivalent.

Deuxième Partie.

1. Plus de 40% des candidats ne remarquent pas que par définition de G, la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ en est une famille génératrice.
En dimension finie, une famille libre (ou génératrice) n'est pas toujours une base.

2. La définition d'un endomorphisme est mal connue, de même que la notion de restriction. Rappelons que cette dernière donne des informations sur le domaine de départ de la fonction et non son domaine d'arrivée.
La linéarité de ϕ_1 est souvent démontrée en une seule étape avec la seule justification « φ » est linéaire, $\vec{u}$ étant traité comme une constante... quand il n'est pas supprimé.
Le produit scalaire est bilinéaire (et non linéaire).

3. (a) La construction de A doit être justifiée par les calculs de $\phi_1(f_k)$ pour $k = 1$, 2, 3, 4, 5 et 6. A noter que ces calculs suffisent (avec la linéarité de ϕ_1) à prouver que ϕ_1 est un endomorphisme. En les faisant figurer à la question précédente, on évite soit des calculs - pénibles à écrire - avec des λ_k ou le bla-bla qui n'est souvent constitué que d'affirmations.

On se demande si les candidats ayant trouvé $A^2 = -I_6$ ont bien fait le calcul, ou s'ils ont extrapolé le résultat après le calcul de quelques coefficients...

(b) Les candidats confondent « sans calcul » et « sans justification ».

Dans la liste des erreurs trouvées dans cette question :

$\rightsquigarrow$ « A^2 est diagonale supérieure ou A^2 est symétrique réelle. »

$\rightsquigarrow$ « A est triangulaire supérieure donc A^2 est (ou n'est pas - suivant les copies) diagonalisable. »

$\rightsquigarrow$ « A^2 possède une valeur propre multiple donc elle n'est pas diagonalisable. »

$\rightsquigarrow$ « Le polynôme caractéristique est scindé donc A^2 est diagonalisable. »

$\rightsquigarrow$ « Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. »

$\rightsquigarrow$ « A^2 diagonalisable donc A diagonalisable. »

$\rightsquigarrow$ ...

(c) Le calcul de ϕ_1^2 a été fait en utilisant le théorème de Schwarz sans que celui si soit cité et encore moins justifié.
Mais on trouve aussi des candidats ayant remarqué que pour toutes les fonctions de G, certaines dérivées secondes étaient nulles et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -f$ et ont donc optimisé l'équation proposées. Cela a été, bien entendu, valorisé.

(d) Cette question a été assez peu traité, y compris par ceux ayant calculé les sous espaces propres (calcul non autorisé) en 3.(b) ou ceux ayant répondu à la question précédente. Le lien entre les vecteurs propres de ϕ_1^2 et ceux de A^2 sont -ils bien compris ?

Troisième Partie.

1. (a) Seulement 48% des candidats répondent correctement à cette question de cours... Signalons une confusion entre (a, b, c) non tous nuls et (a, b, c) tous non nuls.

   (b) Cette question n'a pas posé de problème particulier aux candidats connaissant la définition du plan tangent... et ayant lu la dernière ligne de l'introduction. On note quand même de nombreuses erreurs de calcul dans le développement, ou la division par 2 de l'équation demandée.

2. (a) Quelques dérivées bizarres... Ecrire l'équation du plan tangent est inutile ici.
   Ce n'est pas parce que « cela marche » en un point M_0 particulier (souvent celui de la question précédente... qui n'appartient pas toujours à la surface) que « cela marche » pour tous les points.
   Quelques candidats ont établi que la surface est régulière.
   Quand à la nature de cette surface... on trouve souvent une page de calculs pour aboutir à S est : une parabole, une ellipse, une hyperbole, un cercle, une droite, la réunion ou l'intersection de deux droites... objets qui, faut-il le rappeler, ne sont pas des surfaces.
   A l'intention des futurs candidats : les cônes, cylindres et quadriques ne figurant pas au programme, les seules surfaces que vous pouvez identifier à l'aide d'une équation sont les plans et les sphères.

   (b) Il y a ceux qui connaissent la règle de dérivation des fonctions composées (ou règle de la chaîne), au prix parfois d'une notation inadéquate : $\dfrac{\partial g}{\partial x + y}$ et les autres...

   (c) Il suffisait d'écrire $y - z = (x - z) - (x - y)$... ce qui a été fait par 27% des candidats.

3. (a) Il s'agissait de justifier que cette surface réglée correspondait au problème de cette partie. On attendait pour cela le résultat suivant qui figure explicitement au programme « Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point ».
   Au lieu de cela, il y a eu beaucoup d'explication vaseuses, très imprécises ($\vec{u}$ engendre ou dirige S), voire fausses (S ou $\vec{u}$ est tangent à Γ, et qui se terminent régulièrement par un « forcément ».

   (b) Des candidats se contentent de vérifier que Γ est dans la surface d'équation $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$, d'autres vérifient que le paramétrage de S vérifie l'équation, ou tentent des explications avec des translations (ce qui aurait pu aboutir). Finalement seul 1 candidat sur 5 arrive au résultat... à condition de ne pas être trop regardant sur la rédaction.
   Pourtant, il s'agit là d'une des capacités exigibles du programme de PT (page

24) : ≪ Exemples [...] de recherche de paramétrages et équations cartésiennes (surfaces de révolution, surfaces réglées) ≫. Nous invitons donc les futurs candidats à s'entraîner à cette recherche et à la rédiger soigneusement à l'aide d'équivalents et de quantificateurs ($\exists$, et non $\forall$).

(c) Rappelons (comme tous les ans) que dans l'espace, 2 équations sont nécessaires pour décrire une courbe et que les points (et les vecteurs) ont trois coordonnées. 27% des candidats n'identifient pas un cercle, seuls 18% en donnent la totalité des éléments caractéristiques.

(d) Il convenait de préciser que l'axe contenant tous les centres n'était pas orthogonal aux plans Π_a.
La conclusion correcte de cette question était ≪ on ne peut pas dire que S est une surface de révolution ≫ et non ≪ on peut dire que S n'est pas une surface de révolution ≫.

i. Là aussi, ≪ sans calcul ≫ ne veut pas dire ≪ sans justification ≫. Par ailleurs, la question portait sur l'endomorphisme associé à P et pas sur P directement.
L'orientation de la base est rarement évoquée.

ii. Trop peu de candidats connaissent la méthode à utiliser.
Parmi ceux qui ont une idée sur ce qu'il faut faire, il y a ceux qui se trompent dans le calcul de $\vec{e_2}$, ceux qui se trompent dans l'ordre des colonnes de P (et ceux qui échangent lignes et colonnes), ceux qui ne connaissant pas les formules de changement de base, ceux qui expriment X, Y et Z en fonction de x, y et z et qui ne savent pas quoi en faire... et pourtant certains de ces candidats arrivent quand même à la bonne réponse. Il y a aussi ceux qui pensent que les correcteurs vont faire ou finir leurs calculs.

iii. Cette question est très décevante.
Les candidats se lancent sans réflexion dans une suite de calculs automatiques sans analyser ni la question ni l'équation proposée. Certains en oublient même de répondre à la question posée.
Ici, en l'absence de partie linéaire, seul le calcul des valeurs propres était utile pour donner l'équation réduite et donc la nature de la courbe.
La détermination des sous-espaces propres n'était utile que pour la question suivante... que trop de candidats ont négligée.

iv. Le correcteur va d'abord chercher les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ (ceux de l'énoncé, pas ceux du candidat qui est invité à trouver une autre notation pour son nouveau repère, par exemple ε_1 et ε_2), et vérifier que ceux-ci sont bien unitaires, c'est à dire de longueur 6cm (et non placés au bout des axes).
Ensuite, il va chercher ε_1 et ε_2 et vérifier quils sont aussi unitaires.
Enfin, il va regarder l'allure de l'ellipse.
Les vecteurs ε_1 et ε_2 sont souvent faux (et pas uniquement pour un problème

de longueur) et pour une raison inconnue, beaucoup de candidats ont fait le tracé dans le repère $(O\,;\,\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$.

Quatrième partie.

1. Les plans proposés sont souvent corrects mais il en manque. Les principales sources d'erreurs sont des notations mal choisies, des plans qui passent tous par O et le fait que l'orthogonal de $\vec{u}$ n'est pas un plan.

2. Il convenait d'introduire d'abord la fonction définie par $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ ou un paramétrage de la surface.
   La démonstration de cette question doit figurer dans tous les cahiers de cours des candidats, elle n'a pourtant été réussie que par 35% d'entre eux.

3. Comme la fonction h est une fonction d'une seule variable, il convient d'utiliser h' ou $\dfrac{dh}{dt}$ plutôt que des dérivées partielles.
   De nombreuses tentatives d'escroquerie dans cette question.

4. (a) On trouve régulièrement des produits scalaires d'un vecteur à 2 coordonnées avec un vecteur à 3 coordonnées.
   Il n'est pas possible de commencer cette question par « d'après la question précédente, comme g est solution alors $g = ...$ », la question précédente étant en « si $g = ...$ alors g est solution ».

   (b) Dans l'écriture « $\delta(x, y) = (x_1, y_) \Leftrightarrow (x, y) = \delta^{-1}(x_,y_1)$ » $\Rightarrow$ prouve l'injectivité et $\Leftarrow$ la surjectivité, donc le raisonnement par équivalence est impératif.
   Si on veut exploiter le noyau et/ou le rang, il faut déjà remarquer que la fonction est linéaire, par exemple en disant qu'il s'agit de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = ...$ et dans ce cas, calculer $\det(M)$ est suffisant.
   Par ailleurs, ce n'est pas parce que « on est en dimension finie » (pas assez précis) que « injectif $\Leftrightarrow$ bijectif ».
   Le théorème de la bijection ne fonctionne pas ici. Une fonction de deux variables peut être de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune de ses deux variables sans être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On voit plus souvent la justification « les composantes sont polynomiales » dans les calculs des parties I et III que dans cette question...

   (c) Il suffisait de poser $g_1 = g \circ \delta^{-1}$... A la place on voit beaucoup de « d'après la question 3, g est solution donc $g = ...$ »

(d) Voir III 2. (b).
Bien que les calculs soient les mêmes, il n'y a pas de corrélation systématique (même en faisant abstraction des candidats qui n'ont pas traité cette question faute de temps) entre les résultats de ces deux questions. Peut-être parce qu'elles étaient posées différemment ?

(e) On demandait ici un ≪ si et seulement si ≫, les candidats qui mettent des ≪ donc ≫ entre leurs lignes ne répondent donc pas à la question.

(f) Souvent correct si (Eq_2), l'est même si on ne sait pas toujours où est la fonction G_1. Il est de plus inutile de rajouter une (vraie) constante à G_1...

(g) Question plutôt ratée...
Cependant quelques (rares) candidats ont constaté qu'ils venaient d'établir la réciproque de la question 3.

5. (a) On trouve beaucoup trop souvent ≪ g vérifie (Eq_1) donc d'après la question 4(a)... ≫
Les dérivées partielles de g sont régulièrement fausses.

(b) Parce qu'elle était posée en bout de sujet, il n'y avait pas d'indication. Quelques candidats ont eu l'idée d'exploiter $x - 2y = cte$ sans forcément aller au bout.

(c) Les candidats ont été un peu plus nombreux à écrire $\nabla g = \vec{0}$,mais peu sont allés au bout.

(d) La Hessienne ne fonctionnant pas ici, peu de candidats sont parvenus (faute de temps) à la réponse.