Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Remarques générales

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire, lui-même découpé en trois parties largement indépendantes, et d'un exercice de probabilités. Chaque partie du problème ainsi que l'exercice de probabilités avaient un poids à peu près équivalent dans la notation.

D'une façon générale, nous regrettons une baisse de la qualité de la présentation des copies, à plusieurs niveaux :

i. **Présentation :** certaines copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une copie de concours.

ii. **Rédaction :** on ne sait pas toujours ce que veut faire le candidat ni à quoi servent les calculs présentés. Annoncer ce que l'on cherche à faire guide le correcteur.

iii. **Rigueur mathématique :** les équivalents sont utilisés à très mauvais escient, en revanche les quantificateurs sont inexistants et on ne sait pas toujours si on travaille à x fixé (vérifiant certaine propriété) ou pour tout x...

Tous ces points entrent en ligne de compte dans la notation.

L'épreuve était semble-t-il de difficulté tout à fait raisonnable, certains candidats réussissant à traiter la quasi-totalité des questions. Le niveau moyen reste assez faible.

Il est également à noter que certaines questions étaient des démonstrations explicitement au programme tels que « la loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre », ou encore « une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe », et il est anormal que la grande majorité des candidats ne puisse pas répondre clairement à ce genre de questions.

Remarques particulières

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème étudiait des questions autour de la diagonalisation et des puissances itérées de certaines matrices.

Partie I

Cette première partie consistait à diagonaliser une matrice symétrique réelle de taille 3×3, puis à calculer sa $n^{ième}$ puissance itérée via une relation de récurrence linéaire.

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés d'une matrice ne pose pas de problème pour la plupart des candidats. En revanche, les conditions de diagonalisation restent parfois floues : la condition polynôme scindé ne suffit pas, encore moins déterminant non nul !

Le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants est étonnament ignoré de beaucoup de candidats (avec peut-être des confusions avec les équations différentielles d'ordre 2, une exponentielle $e^{\lambda n}$ apparaissant souvent à la place du λ^n attendu).

Précisons enfin qu'une relation obtenue pour trois termes d'une suite n'entraîne pas qu'elle est valable pour tout n et que, même si l'énoncé s'intitule « en déduire ... », une démonstration en bonne et due forme est toujours attendue.

Partie II

La seconde partie étudiait les puissances itérées d'une matrice dont les trois premières puissances s'exprimaient simplement en fonction de deux matrices données. Cette partie a été plutôt bien réussie, excepté la seconde question qui a mis en évidence une certaine malhonnêteté (?) de beaucoup de candidats qui ont écrit des égalités fausses pour obtenir le résultat attendu (essentiellement, $(\lambda U + \mu V)(\lambda^p U + \mu^p V) = (\lambda^{p+1} U + \mu^{p+1} V)$) ou qui affirment que $UV = 0$ (ce qui était en l'occurrence vrai) sans aucune justification.

Partie III

Cette dernière partie étudiait la diagonalisibilité d'une matrice de la forme

$$A = aI + U\,{}^tV$$

où U et V sont des vecteurs colonnes fixés. Le début de cette partie a été en moyenne bien traitée, le produit matriciel étant en général maitrisé. Il faut cependant éviter d'écrire des

égalités de la forme
$$A = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{kj},$$
une matrice ne pouvant pas être égale à un nombre !

Même si l'on a encore vu des vecteurs élevés au carré, cela est resté rare, tout comme des égalités du type $U\,{}^tV = {}^tV\ U$. Les dimensions des matrices obtenues à l'issue de ce type de produit étaient en général les bonnes.

Précisons que nous aurions aimé voir plus souvent que les matrices commutaient pour pouvoir appliquer la formule du binôme pour développer le carré d'une somme, même si l'une de ces matrices était l'identité.

La fin de cette partie a été plus difficile, la condition de diagonalisibilité avec la somme des sous-espaces propres étant largement ignorée. A ce sujet, il est souvent dit que le sous-espace vectoriel forme une base d'on ne sait quoi, confusion très dérangeante même s'il y a effectivement des liens entre somme directe d'espaces vectoriels et réunion de bases. Encore une fois, il ne faut pas confondre les différentes notions et bien avoir conscience de la nature des objets manipulés.

Exercice de probabilités

Cet exercice étudiait diverses propriétés de la loi géométrique utilisant notamment la fonction de répartition et la fonction génératrice de cette loi.

Contrairement à l'année précédente, cet exercice a posé beaucoup de difficultés aux candidats, la principale étant le calcul de la somme de termes d'une suite géométrique.

Il y a par ailleurs beaucoup de confusion entre probabilités, événements, variables aléatoires, et il est toujours désagréable de voir des intersections de probabilités ou de variables.

En cumulant ainsi mauvaise compréhension des outils, et calculs laborieux voire complètement faux, les résultats de cette partie ont été très mauvais. Cet exercice s'est révélé très discriminant entre bons candidats et candidats plus faibles.