Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

L'oral de mathématiques I consiste en une interrogation au tableau sans préparation, d'une durée de 30 minutes. L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Le but de cet oral est de juger et d'évaluer :

- les connaissances ;
- le savoir-faire technique et les capacités mathématiques ;
- l'imagination et l'adaptabilité dans une situation un peu nouvelle des candidats.

Afin de juger de la performance de ceux-ci, l'examinateur prend en compte les éléments suivants (liste non exhaustive) :

- la compréhension du problème posé ;
- les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter) ;
- la précision du langage et la connaissance précise du cours, la capacité d'envisager différentes méthodes et de réfléchir à leurs utilisations ;
- la justification précise de ce qui est fait ;
- la maîtrise du raisonnement mathématique : la plupart des candidats sont incapables d'être précis pour énoncer une condition nécessaire et suffisante (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, caractérisation des endomorphismes trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique, par exemple). On a droit à un vague « si », et les investigations révèlent que des candidats ne savent même pas trop dans quel sens ils étaient en train de l'énoncer.

- ⇝ l'organisation et la présentation du tableau, la qualité de l'expression orale : nous rappelons que les sujets des phrases doivent être corrects pour que le raisonnement soit rigoureux (les phrases qui commencent par « ça converge », finissent assez souvent mal quand on demande ce qu'est le « ça »).

Certains exercices sont longs, le jury n'attend pas nécessairement des candidats qu'ils finissent ceux-ci ; un candidat ayant très bien traité une proportion raisonnable d'un exercice long, peut ainsi avoir une note très satisfaisante.

En fin de planche d'oral, cinq minutes sont réservées à des questions de cours. Parmi les questions posées cette année - entre autres, et toujours très, très classiquement : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition d'un produit scalaire, la formule de Taylor-Young (et son utilité), la formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le théorème des accroissements finis, la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable à l'aide des dimensions des sous-espaces propres, définition et propriété de la trace, trace d'un projecteur, formules de Frenet (et utilité), suites adjacentes, définition et caractéristiques des isométries, caractérisation des projecteurs, caractérisation des symétries, matrices orthogonales, développements en série entière classiques, continuité/dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, définition et interprétation des lois de probabilité usuelles, espérance et variance, formule des probabilités totales, le théorème de transfert, énoncer la loi faible des grands nombres, donner les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, ...

Cette année, le jury a noté que les candidats sont de moins en moins capables d'utiliser les résultats d'une question antérieure, voire de s'en souvenir, même dans les cas les plus simples. Au point que certains refont des calculs faits quelques minutes auparavant ... La majorité des candidats s'avère incapable de mener à bien des calculs sans grande difficulté. D'autres ne font aucune simplification (en gardant des $\frac{4}{2}$). Certains candidats cherchent visiblement à gagner du temps, ou se montrent incapables de réagir.

Le jury souhaite insister sur les points suivants :

- ⇝ Le premier contact du candidat avec l'examinateur, c'est, après les formules de politesse d'usage, de lui remettre pièce d'identité et convocation. Si cette dernière n'était pas pliée en huit ou plus, chiffonnée, déchirée ou tachée, cela donnerait une meilleure impression.

- ⇝ De nombreux candidats agissent comme en colle, en proposant des idées mais en attendant une validation avant de commencer les calculs. On apprécie les candidats qui réfléchissent à haute voix, qui proposent des méthodes et qui savent éliminer celles qui n'iront pas au résultat. On apprécie également lorsque le candidat explique sa stratégie pour résoudre une question ou dans quel but, il fait des calculs.

Par contre, donner toutes les méthodes possibles, sans en essayer aucune, en espérant que l'examinateur indiquera quelle est la bonne, n'est pas forcément une bonne idée. De même, il ne faut pas attendre de l'examinateur qu'il valide chaque ligne écrite (quand ce n'est pas chaque terme écrit). Ce n'est pas ce qui est attendu un jour de concours.
Rappelons donc **les principes de l'oral** : il faut parler, être autonome et dynamique. Ne pas tout écrire au tableau comme sur une copie, ne pas trop regarder la feuille d'énoncé. La gestion du tableau n'est pas toujours optimale. En particulier, ce n'est pas une bonne idée d'effacer les résultats intermédiaires.

$\rightsquigarrow$ Les candidats doivent dialoguer avec l'examinateur. Tous les résultats doivent être expliqués et/ou justifiés sans que l'examinateur ait besoin de le demander. Pour cela, ils sont invités à faire des phrases avec des sujets identifiables. Par exemple éviter ≪ ça converge ≫, ≪ elle est intégrable donc elle converge ≫, ou encore les expression du type ≪ par indépendance ≫ (≪ de ... ≫ n'étant pas précisé).

$\rightsquigarrow$ Le jury s'est étonné du manque de dextérité de beaucoup de candidats confrontés à un calcul, si petit soit-il. En particulier, les manipulations de valeurs absolues posent beaucoup de problèmes, certains candidats ne pensent pas à modifier le signe d'une inégalité lorsqu'ils multiplient chaque membre par un nombre négatif, les identités remarquables réservent parfois des surprises, etc... Il arrive que ceux-ci n'aillent pas au bout et soient remplacés par du ≪ blabla ≫, ou qu'ils soient accompagnés de soupirs.

$\rightsquigarrow$ D'une manière générale, les candidats ne présentent que rarement les objets mathématiques qu'ils utilisent (peu de quantificateurs, notamment). Par exemple, si on étudie l'imparité sur $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de $x \mapsto f(x) = \dfrac{\cos(\pi\, x)}{\sin(\pi\, x)}$, le candidat fixe $x \in D$, calcule $f(-x)$ sans problème, mais ne regarde à aucun moment si $-x \in D$ ou non. De même, pour la 1-périodicité de cette fonction. De manière analogue, un identité matricielle du type, $M\,P = P\,D$ se transforme en $M = P\,D\,P^{-1}$ sans même que le candidat pense à vérifier si P est ou non inversible.

$\rightsquigarrow$ Le fait que cela soit une épreuve orale ne signifie pas que l'on doit pas respecter quelques règles de rédaction. En particulier, équations et systèmes doivent être résolus par équivalence et non en essayant de deviner les solutions.

$\rightsquigarrow$ Même avec des énoncés justes, il n'est pas rare que les notations ne soient pas (ou mal) définies (même oralement) (loi de probabilité, théorème du rang notamment, ...)

$\rightsquigarrow$ La question de cours posée par le jury au candidat à la fin de l'oral a souvent révélé des fragilités insoupçonnées sur certaines notions importantes du programme.

$\rightsquigarrow$ Certains tics de language, rendus désagréables par leur fréquence plus qu'élevée, ont été constatés au cours des oraux : ≪ du coup ≫, ≪ pas de souci ≫, ≪ forcément ≫.

- Le jury a été surpris de constater que certains candidats demandent à la fin de leur oral : « Je peux vous demander comment ça s'est passé ? »

- Pour terminer cette liste sur une note positive, le jury a aussi vu des candidats tout à fait excellents.

Remarques particulières

1 Analyse

- Les parenthèses ne sont pas optionnelles.

- On résout une équation et non « un polynôme ».

- De nombreux candidats confondent le fait qu'une fonction soit continue en un point, et prolongeable par continuité en ce point.

- La distinction entre continuité et dérivabilité n'est pas toujours très claire (pour certains candidats, la fonction est continue donc dérivable ...)

- Beaucoup de candidats pensent que si la dérivée d'une fonction d'une variable s'annule, alors la fonction admet un extremum local en ce point.

- Dans la même veine, la distinction entre un inf et un min (resp. un sup et un max) est rarement faite au cours de la résolution des exercices.

- Le calcul de limite par recherche d'équivalents ou de développements n'est pas maîtrisé par de nombreux candidats. Le développement limité d'un quotient pose de gros problèmes aux candidats. Ainsi, obtenir le développement limité au voisinage de zéro d'une expression de la forme $\dfrac{f(x)}{1+u(x)}$, où u est de limite nulle en zéro, n'est pas évident pour beaucoup.

- Dans l'écriture du développement limité à l'ordre deux d'une fonction de deux variables, peu de candidats parviennent à donner une définition correcte et complète du terme de reste, lorsqu'ils ne se trompent pas dans la formule.

- Pour les tracés de graphe, le jury rappelle qu'il est impératif de faire figurer le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui soient bien de norme 1 (le jury les a vus de temps en temps à la fin des axes).

- $\rightsquigarrow$ Le jury a interrogé plusieurs candidats sur la définition de certaines fonctions usuelles telles que arccos, arcsin ou arctan et a été surpris de constater des erreurs importantes.

- $\rightsquigarrow$ Le théorème de la bijection n'est pas bien connu. beaucoup de candidats ont affirmé qu'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, strictement monotone, réalisait une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

- $\rightsquigarrow$ L'énoncé du théorème de Rolle n'est pas souvent donné correctement : des candidats disent que le réel c est dans $[a, b]$, que la fonction est de classe est définie ou de classe C^1, l'intervalle de dérivabilité est erroné, etc ...

- $\rightsquigarrow$ Concernant la formule de Taylor avec reste intégral, le jury a obtenu des réponses étranges. Déjà, des candidats parlent d'une formule locale « au voisinage de a », l'ordre de dérivation sous le signe intégral est erroné, la factorielle est erronée dans le reste intégral, ...Utiliser cette formule pour obtenir un encadrement n'est que rarement effectué. Aussi, si $f \in C^{n+1}(I)$, $n \in \mathbb{N}^\star$, des candidats donnent une égalité entre $f(x+h)$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-h)^k\, f^k(x)}{k\,!} + \int_n^{n+1} \frac{(t-h)^n\, f^{n+1}(t)}{n\,!}\, dt$$

ou entre $f(a)$ et

$$f(b) + (b-a)\, x + \ldots + \frac{(b-a)^n\, x^n}{n\,!} + \int_0^1 \frac{(b-a)^t\, x^t}{t\,!}\, dt$$

- $\rightsquigarrow$ Les développements en série entière usuels ne sont pas bien connus ($x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$). Il faut aussi régulièrement demander le domaine de validité qui lui, est souvent faux (nombre de candidats sont surpris par cette question).

- $\rightsquigarrow$ Pour le théorème de dérivation des séries entières : le jury a souvent obtenu la formule, mais jamais d'information sur les rayons de convergence.

- $\rightsquigarrow$ Lorsqu'on étudie une intégrale, il faut regarder la continuité sur tout l'intervalle et pas seulement aux bornes. Peu de candidats semblent le savoir.

- $\rightsquigarrow$ Le changement de variables pour une intégrale généralisée n'est pas souvent maîtrisé.

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats ne savent pas étudier correctement la convergence d'intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\,t}\, dt \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\int_0^1 \ln t\, dt$$

Ils écrivent des égalités entre des expressions de la forme $\displaystyle\int_0^X e^{-a\,t}\,dt$, $X > 0$, et

$$\left[\frac{e^{-a\,t}}{a\,t}\right]_0^X$$

ou encore entre des expressions de la forme $\displaystyle\int_y^1 \ln t\,dt$, $y > 0$, et

$$\left[\frac{1}{t}\right]_y^1$$

⇝ La règle de d'Alembert pour les séries numériques n'est pas correctement connue : de nombreux candidats écrivent que si les termes u_n d'une série sont tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

alors la série converge.

⇝ Concernant le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes $\sum a_n\,z^n$ et $\sum b_n\,z^n$, certains candidats confondent la formule donnant le coefficient c_n et la formule du binôme de Newton.

⇝ Le jury a vu de nombreuses tentatives pour démontrer par récurrence des formules dont on ne connaît pas la forme ... (On notera que sur le même exercice, des candidats ne reconnaissent pas les premiers termes de $n\,!$ quand ils obtiennent $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 24$, $a_5 = 120$)

⇝ Les définitions de boules ouvertes, fermées, parties ouvertes et fermées, etc. sont trop rarement connues. Un nombre non négligeable de candidats pensent qu'un ensemble U est ouvert s'il est inclus dans une boule ouverte.

⇝ Un nombre non négligeable de candidats a parlé de ≪ dérivée d'une fonction de plusieurs variables ≫.

⇝ Des candidats ne savent pas que le gradient d'une fonction de classe C^1 s'annule en un extremum uniquement si on est sur un ouvert. Le gradient a d'ailleurs souvent été cité pour des fonctions qui ne sont pas à valeurs dans $\mathbb{R}$.

⇝ On rappelle qu'un extremum pour une fonction est un réel, et non un point.

⇝ Pour déterminer les extrema d'une fonction de plusieurs variables, certains candidats calculent la matrice hessienne, et affirment que ≪ si son déterminant est strictement négatif, on obtient un minimum, si son déterminant est strictement positif, on obtient un maximum ≫, après avoir parlé de ≪ point de rebroussement de la fonction ≫.

- ⇝ De nombreux candidats ne savent pas dériver par rapport à la variable réelle t des fonctions de la forme :

$$t \mapsto f\left(X_1(t), \ldots, X_n(t)\right)$$

2 Algèbre

- ⇝ Des questions simples (définition d'une application linéaire, par exemple) posent parfois problème.

- ⇝ De nombreux candidats écrivent que la formule de Grassmann permet de calculer $\dim(F \cup G)$. Ces mêmes candidats ne savent pas que $F \cup G$ nest pas en général un espace-vectoriel.

- ⇝ La dimension d'un hyperplan dans un espace de dimension finie E est connue, mais la définition comme supplémentaire dune droite vectorielle ne l'est que rarement. La minoration de la dimension de $(H_1 \cup \cdots \cup H_p)$ lorsque $H_1, \ldots, H_p$ sont des hyperplans de E, est peu connue.

- ⇝ On ne cherche pas le ≪ Ker ≫ d'une matrice, mais son noyau.

- ⇝ Il convient de connaître que ≪ Vect ≫ signifie ≪ sous-espace vectoriel engendré par ≫.

- ⇝ On constate des confusions entre vecteurs propres (on rappelle à ce sujet que dès qu'il y a un vecteur propre, il y en a une infinité) et sous-espaces propres.

- ⇝ Le lien entre base et déterminant n'est pas bien connu.

- ⇝ Certains candidats ne savent pas donner la valeur correcte en 0 du polynôme caractéristique d'une matrice carrée A de taille $n \times n$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Souvent, le jury a obtenu comme réponse :

$$\det(-A) = -\det A$$

- ⇝ Certains candidats affirment que dans $\mathbb{R}^2$, le rang d'un système de trois vecteurs est égal à trois.

- ⇝ Certains candidats ne savent pas déterminer l'inverse d'une matrice carrée $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^\star$, en résolvant un système de la forme $A\,X = Y$.

- ⇝ Concernant la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, le jury a obtenu la description à peu près correcte du processus opératoire, mais jamais l'énoncé, avec des hypothèses (base de départ absente, notamment).

- $\rightsquigarrow$ L'inégalité de Cauchy-Schwarz est bien énoncée, mais rarement bien appliquée sur des exemples particuliers ; il est par exemple compliqué d'obtenir des candidats que $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\,dt$ si $f \in C^0([0;1],\mathbb{R})$.

- $\rightsquigarrow$ Les candidats ne sont pas à l'aise sur l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

- $\rightsquigarrow$ Si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^\star$, et si $(e_1,\ldots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la formule $a_{ij} = (A\,e_j|e_i)$ pour $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ est souvent ignorée.

- $\rightsquigarrow$ La réduction des matrices symétriques est bien maîtrisée.

- $\rightsquigarrow$ Les complexes posent souvent problème. De façon moins grave, à la question « Quel est le sens de $|z| = 1$? », des candidats répondent « $x^2+y^2 = 1$ », ou encore « $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ », sans penser à $z\,\bar{z} = 1$.

3 Géométrie

- $\rightsquigarrow$ Beaucoup de candidats ne savent pas ce qu'est une surface réglée.

- $\rightsquigarrow$ Les formules de Frenet ne sont pas bien connues. Parfois, c'est même la définition du vecteur $\vec{T}$ qui est ignorée.

- $\rightsquigarrow$ Le jury apprécierait davantage d'illustrations graphiques.

- $\rightsquigarrow$ L'aspect d'une courbe au voisinage d'un point stationnaire n'est pas bien connu, et le recours à un développement limité pour l'obtenir, encore moins.

- $\rightsquigarrow$ La réduction des coniques est bien maîtrisée, même si les candidats ne connaissent pas toujours la définition complète de celles-ci. En revanche, certains candidats veulent expliciter complètement les espaces propres de la matrice symétrique sous-jacente alors que l'on demande parfois seulement de donner la nature de la conique. Au-delà de l'étude des coniques, cet automatisme dans les raisonnements peut pénaliser les candidats qui perdent un temps certain alors que le jury l'invite à obtenir le résultat avec un autre argument.

4 Probabilités

- $\rightsquigarrow$ On constate de nombreuses confusions entre variables aléatoires, événements et probabilités, induisant des multiplications d'événements ou des intersections de probabilités, ainsi qu'entre des événements indépendants et des événements incompatibles : les candidats ont régulièrement du mal à identifier les situations où on a l'un ou l'autre. Les événements sont souvent mal définis : « on tire la boule numéro 1 », sans préciser à quel tirage.

- $\rightsquigarrow$ La définition d'un système complet d'événements n'est pas toujours maîtrisée.

- $\rightsquigarrow$ Des illustrations (arbres...) permettraient à de nombreux candidats d'éviter de dire des bêtises.

- $\rightsquigarrow$ Dans les lois de probabilité usuelles, n et k désignent en général des entiers et p désigne un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$, ce qui est confondu avec l'interprétation de ces nombres.

- $\rightsquigarrow$ De nombreux candidats semblent ignorer que si X est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, les $[X=k]_{k\in\mathbb{N}}$ constituent un système complet d'événements.

- $\rightsquigarrow$ La formule donnant $P(X=k)$, si la v.a. X suit une loi binomiale, est bien connue, mais les candidats confondent souvent Ω et $X(\Omega)$ (qui vaut $\mathbb{N}$ pour de nombreux candidats). De plus, l'événement $[X=k]$ nest pas toujours bien interprété (nombres d'épreuves au lieu du nombre de succès).

- $\rightsquigarrow$ Beaucoup de candidats ne sont pas capables d'énoncer des hypothèses correctes lorsquils utilisent le théorème de transfert. Lorsque la formule est correcte, les candidats ne parlent jamais de l'absolue convergence de la série de terme général $f(x_k)\,P\,(X=x_k)$. Le jury a, par ailleurs, obtenu de nombreuses formules fantaisistes, avec des égalités entre $E\,(f(X))$ et

  $$\sum f(X)\,P\,(X=n)$$

  ou encore

  $$\sum f(x^k)\,P\,(X=k)$$

  parfois :

  $$\sum f(X^k)\,P\,(X=k)$$

- $\rightsquigarrow$ La loi faible des grands nombres semble inconnue de la plupart des candidats.

- $\rightsquigarrow$ L'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est pas toujours connue.

- $\rightsquigarrow$ Les hypothèses nécessaires pour énoncer les inégalités de Markov ($X>0$) et Bienaymé-Tchebychev sont rarement connues.

- $\rightsquigarrow$ Concernant la formule des probabilités totales : certains candidats oublient systématiquement le fait qu'écrire $P\,(B|A_k)$ ne peut se faire si $P\,(A_k)=0$. D'autres, dans de nombreux cas ou le système complet d'événements est fini (resp indéxé par $\mathbb{N}$), écrivent que la somme pour le calcul de $P(B)$ est celle d'une série.

- $\rightsquigarrow$ Pour la loi de Poisson, beaucoup de candidats écrivent que $X(\Omega)=\mathbb{R}$; d'autres oublient de façon systématique le $e^{-\lambda}$ dans l'expression de $P(X=k)$, quand ils ne le transforment pas en e^{λ}.

- $\rightsquigarrow$ La définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y n'est pas connue (ou remplacée par la formule de König-Huygens). Certains (pourtant assez bons) candidats disent même ne pas connaître cette notion. Quant à préciser que X et Y doivent admettre un moment d'ordre 2 pour utiliser la formule de Koenig-Huygens, rares sont les candidats qui le font.

- $\rightsquigarrow$ Globalement, le jury a entendu des choses étranges sur les exercices de probabilités. Pêle-mêle : $P(X)$, ignorance de ce qu'est $[X = a]$ ou $[X \leq a]$, apparition d'expressions de la forme $X \cap A$, où X est une variable aléatoire et A un événement, et même d'expressions du type $X \cap Y$, où X et Y sont des variables aléatoires...

- $\rightsquigarrow$ Souvent, les candidats sont incapables de faire la distinction entre ce que l'on cherche et les hypothèses.