Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Comme l'année précédente, cette épreuve était découpée en un problème d'algèbre linéaire et un exercice de probabilités. Elle s'est révélée très classante, certains candidats, excellents, traitant la quasi-totalité des questions de façon adéquate alors que beaucoup d'autres n'ont abordé que les quelques questions faciles relevant pratiquement de la question de cours.

Reconnaissons tout de suite notre erreur en demandant la matrice hessienne d'une fonction de trois variables, ce qui est officiellement hors programme. Fort heureusement, cette question n'était pas utile pour la suite et n'a pas bloqué les candidats. Il a par ailleurs été tenu compte de cette erreur dans la notation, afin de ne pas pénaliser les candidats ne connaissant pas cette notion dans un cadre général.

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème traitait de la minimisation d'une forme quadratique (définie positive) sur $\mathbb{R}^3$, et de sa résolution (dans un cadre général) par la méthode du gradient conjugué. Détaillons question par question les remarques à faire sur ce probème.

Partie I

Il s'agissait ici de réduire une matrice carrée à coefficents réels, symétrique, définie positive, et d'étudier la forme quadratique associée.

Q1. Le fait qu'une matrice symétrique réelle soit diagonalisable est totalement intégré pour la plus grande partie des candidats, la justification de l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres l'est beaucoup moins (beaucoup semblent affirmer qu'une matrice diagonalisable est toujours diagonalisable dans une b.o.n.).

Q2. Malgré de trop nombreuses erreurs de calcul, le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice est assimilé. Pour ceux qui se trompent dans les calculs, il convient d'éviter les réponses aberrantes, telles qu'obtenir le vecteur nul comme unique vecteur propre, ou encore d'obtenir un seul sous-espace propre de dimension 1, alors qu'on a dit juste avant que la matrice était diagonalisable.

Q3. La grande majorité des candidats calculent le déterminant (parfois avec des erreurs) pour répondre à cette question. Les valeurs propres obtenues à la question précédentes suffisaient pour conclure immédiatement. Regrettons la confusion pour un certain nombre de candidats entre « inversible », et « diagonalisable ».

Q4. Que de formules de changement de base écrites à l'envers !

Q5. La première partie de la question a été bien traitée, mais l'écriture de la forme quadratique dans la base de diagonalisation a été catastrophique, beaucoup se lançant dans des calculs inextricables. Ceci montre que beaucoup de candidats maîtrisent les techniques de diagonalisation d'une matrice, mais n'ont aucune idée de l'utilité d'une telle réduction.

Q6,Q7. Deux questions très mal traitées, beaucoup de candidats affirmant certaines inégalités ou implications de façon péremptoire sans aucune justification, à la limite de la malhonnêteté.

Partie II

Nous cherchions à minimiser la forme quadratique

$$J_b(u) = \frac{1}{2} < Au, u > - < u, b >$$

où A est la matrice étudiée dans la première partie et b est un vecteur fixé.

Q1. Cette question a été loin d'être inutile, et a bien mis en évidence que certains candidats manipulent des objets sans avoir conscience de leur nature (scalaires, vecteurs, matrices... tout cela n'est que symboles sans aucune autre réalité). Cette réflexion sur la nature des objets permettrait d'éviter bon nombre d'erreurs.

Q2. La notion de gradient est connue de beaucoup de candidats, nous ne ferons pas de remarque sur la matrice hessienne.

Q3. Que d'inégalités de Cauchy-Schwarz écrites dans le mauvais sens ! Tout cela pour obtenir le bon résultat en soustrayant les inégalités termes à termes (sic). Là encore, un peu d'honnêteté ferait du bien, et un minimum de maitrise sur la manipulation d'inégalités serait souhaitable.

Q4. Cette question a en général été bien traitée.

Q5. Que d'erreurs de raisonnement ! La minoration précédente ne permettait en aucun cas de conclure. Ce n'est pas parce que $x^2 > -1$ que son minimum est négatif !

Q6. Cette question a été relativement bien traitée, même si on pourrait espérer plus de rigueur dans la manipulation des inégalités (arguments de croissance de fonctions, de multiplication par des termes positifs, ...).

Q7,Q8,Q9. Ces questions ont été très peu traitées de façon satisfaisante. Ainsi, beaucoup de candidats pensent qu'un infimum est toujours atteint et l'argument (attendu) pour les fonctions continues sur un fermé borné n'est apparu que sur de très rares copies. Visiblement beaucoup passent à côté du problème et ne comprennent pas vraiment la portée de ce résultat.

Partie III

Nous nous plaçons maintenant dans un cadre général et étudions l'algorithme du gradient conjugué qui permet de calcul numérique de l'inverse d'une matrice symétrique définie positive en au plus n étapes.

Q1. Nous ne savons plus comment l'écrire, alors essayons en gras : **IL FAUT ARRETER D'ELEVER DES VECTEURS AU CARRE ET DE LES MULTIPLIER ENTRE EUX**. Une fois cet axiome assimilé, on pourra alors envisager de faire du calcul vectoriel.

Q2. La notion de famille libre n'est pas assimilée, la majorité des candidats se contentant de dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux voire non nuls.

Q3. Une question de cours visiblement maîtrisée.

Q4. Une autre question de cours déjà un peu moins bien assimilée sur la multiplication de matrices rectangulaires.

Q5,Q6. Des manipulations sur les matrices relativement bien traitées par beaucoup de candidats. Rappelons toutefois que le produit matriciel n'est pas commutatif. Seul l'argument final a été très souvent escamoté : en effet, $Dv = 0$ n'implique pas que l'un des termes est nul ! ! Cela prouve bien que la notion de noyau d'une application linéaire ou d'une matrice reste une notion très abstraite.

Exercice de probabilités

Notons tout d'abord un réel progrès en probabilités par rapport à l'année dernière. Les manipulations élémentaires semblent maintenant maîtrisées par un certain nombre de candidats, même s'il ne faut pas aborder des notions trop compliquées encore.

Q1. Les lois géométriques et binomiales obtenues respectivement comme premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et comme nombre de succès dans un nombre n d'épreuves de Bernoulli indépendantes sont reconnues par beaucoup de candidats. Regrettons cependant l'apparition fréquentes de sommes dans la formule de la loi binomiale.

Q2. Là encore, la formule de Bayes apparaît de la bonne façon assez souvent, même si les indices ne sont pas forcément les bons, ce qui aboutit à une formule finale fausse.

Q3. Beaucoup d'erreurs de calcul dans le calcul des dérivées.

Q4. La formule des probabilités totales est connue, mais bien peu de candidats arrivent au bout des calculs, la plupart ne reconnaisant pas la série obtenue à la question précédente.

Q5. L'argument d'indépendance pour le calcul de l'espérance apparaît très souvent (peut être pas encore assez), mais les valeurs de ces espérances pour des lois pourtant usuelles sont très souvent farfelues. Le calcul de la loi de Y a en revanche posé beaucoup de problèmes, et l'on voit très souvent des absurdités telles que

$$P(UV = k) = P(U = k)P(V = k).$$

Quel sens cela peut-il avoir ?

Q6. Cette question, qui nécessitait d'avoir répondu correctement à la précédente, a été très peu traitée.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Le sujet de cette année était constitué d'un problème comprenant un préliminaire de quatre questions de cours, puis de trois parties. La première partie consistait en l'étude de deux surfaces, dont l'une était incluse dans l'autre (lignes de niveaux, plan tangent...). La seconde partie s'intéressait à une famille de courbes tracées sur l'une des surfaces précédentes. Enfin, la dernière partie avait pour objet de déterminer la nature de l'une de ces courbes, avant de montrer qu'il s'agissait d'une courbe intégrale d'un système différentiel.

Les résultats sont très contrastés, mais globalement un peu décevants pour un problème dont beaucoup de questions étaient des applications directes du cours. Si on trouve peu de copies vides, on trouve par contre près de 7 % de copies où le nombre de questions traitées avec succès ne dépasse pas le nombre de questions de cours du préliminaire. On trouve également quelques très bons candidats ayant traité avec succès la quasi-totalité du sujet. Les questions de cours ou d'application directe du cours sont trop souvent négligées (voir le détail question par question). Les correcteurs ne peuvent que conseiller aux futurs candidats d'apprendre et de maîtriser leur cours.

La présentation des copies s'est peu améliorée cette année. Si heureusement, on compte très peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, à peine un candidat sur deux $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture ...
Par ailleurs, il est rappelé (Cf. la notice du concours) que ≪ les épreuves doivent être écrites à l'encre bleue et/ou noire, exception faite pour des schémas ou graphiques nécessitant une palette plus large de couleurs d'encre alors autorisées ≫. L'usage de stylos dont l'encre est susceptible de traverser le papier est également à éviter.
Encore plus que les années précédentes, l'orthographe de très nombreuses copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figurent dans l'énoncé soient correctement orthographiés, et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), parabole, cartésien(ne), colonne, gradient ... On note également une nette dégradation de la grammaire : accord genre et/ou nombre, mais aussi conjugaison. On ne devrait pas trouver chez de futurs ingénieurs, qui auront à communiquer par écrit, des erreurs du type ≪ on calcul ≫ ou ≪ on a (ou on à) montrer ≫. Dans certaines copies, la situation est telle que les correcteurs ne parviennent pas à comprendre ce que les candidats essayent de dire.

On constate également de nombreuses confusions de vocabulaire et/ou de notions : u et $\vec{u}$, discriminant et déterminant, isomorphisme et isométrie, équation, coordonnées et paramétrage, plan tangent et tangente, sommet, centre et origine, courbe et surface, résoudre et calculer, vecteur propre et sous-espace propre, composée et combinaison...
De plus, un peu plus d'attention vis à vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une surface ou une courbe, calculer le déterminant de deux vecteurs de l'espace, de dire que le produit vectoriel de deux vecteurs est positif ...

Les candidats sont également invités à respecter les notations de l'énoncé.

Avant de passer au détail question par question, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre ...

Questions de cours.

Les quatre questions de cours portaient sur des thèmes qui étaient repris dans la suite du sujet avec les mêmes notations. Cela a permis de déterminer si les candidats ne traitent pas certaines questions à cause du cours non su, ou parce qu'ils ne parviennent pas à mettre en œuvre celui-ci. Les résultats sont les suivants : 11 % des candidats donnent 4 bonnes réponses, 16 % donnent 3 bonnes réponses, 24 % donnent 2 bonnes réponses, 28 % donnent 1 bonne réponse et parmi les 21 % de candidats ne donnant aucune bonne réponse, 1 sur 7 n'a répondu à aucune des 4 questions. En ce qui concerne les points réguliers d'une surface paramétrée, seuls 37 % des candidats donnent la bonne réponse, par contre, 63 % des candidats donnent une définition correcte d'une matrice orthogonale. Malheureusement, seuls 23 % des candidats connaissent la nature d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et savent comment l'identifier.

Partie I

<u>Questions 1.a. et 1.b.</u> La majorité des candidats ont identifié correctement une droite et une parabole, mais la surface S a été peu souvent reconnue comme étant une surface réglée. De plus, il est rappelé aux candidats qu'une représentation cartésienne d'une courbe de l'espace s'écrit avec deux équations et que, dans l'espace, $z = ay + b$ est une équation de plan. Enfin, signalons que nombre de candidats ont fait du zèle en donnant des éléments caractéristiques des courbes identifiées. Malheureusement, le sommet de la parabole avait souvent l'une de ses coordonnées fausse ; quant à la pente, le coefficient directeur et l'ordonnée (ici le terme ≪ cote ≫ aurait été plus approprié) à l'origine de la droite, ce sont des notions qui n'ont pas été définies dans l'espace.

<u>Question 1.c.</u> Lorsqu'elle est traitée, l'étude de la conique est souvent bien faite. Mais il est clair que de nombreux candidats appliquent une ≪ recette ≫ sans en comprendre le sens. En effet, l'étude est souvent complète, y compris la gestion de la partie linéaire (inexistante ici...) alors que pour répondre à la première partie de cette question, seules les valeurs propres de la matrice sont utiles. De plus, presqu'aucun candidat n'est capable d'exploiter son étude pour construire les courbes (les axes du nouveau repère sont souvent devenus les

asymptotes de l'hyperbole). Enfin, de nombreux candidats qui utilisent la bonne formule pour trouver les coordonnées d'un point de la conique dans le nouveau repère, ne donnent pas la bonne réponse à la question III.2.
Par ailleurs, le cas $\gamma = 0$ a souvent été mal géré. De nombreux candidats supposent sans raison que $y \neq 0$; quant à ceux qui n'oublient pas le cas $y = 0$ (dans le plan (xOy)), certains y reconnaissent un plan et d'autres un point.
En ce qui concerne le tracé, celui-ci doit être effectué sur la feuille de papier millimétré qui est distribuée à cet effet. Cette année, de nombreux candidats l'ont effectué sur leur copie ou au dos de la feuille de papier millimétré. Il est rappelé que cette feuille doit être rendue avec la copie même si elle n'a pas été utilisée.
Peu de candidats ont mené le tracé à bien. Il est impératif que les candidats fassent figurer le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sur leur copie. De plus, comme il y a plusieurs courbes, il convient d'utiliser des couleurs différentes et de mettre une légende.
Signalons enfin que la droite du plan d'équation $y = 0$ est l'axe des abscisses.

<u>Question 1.d.</u> Un peu moins d'un candidat sur deux donne une réponse correcte à cette question qui est une application directe du cours. On remarque que de nombreux candidats ont pris le temps de définir la fonction dont ils allaient calculer le gradient.

<u>Question 1.e.</u> Peu de candidats ont répondu à cette question. Certains confondent la position relative de la surface et de son plan tangent avec la nature du point critique de la fonction associée. On note quelques utilisations de la matrice Hessienne (ou du développement limité à l'ordre 2) d'une fonction à trois variables.

<u>Question 2.a.</u> Cette question a été généralement traitée avec succès à condition de ne pas être trop regardant sur la rédaction et/ou l'efficacité des calculs.

<u>Question 2.b.</u> Pour cette question, il convenait de donner explicitement un point qui appartenait à S et pas à Σ en exploitant, par exemple, le fait que l'ordonnée des points de Σ est positive.

<u>Question 3.a.</u> Les résultats de la première question de cours donnent une idée de ceux de cette question. De nombreux candidats évoquent le gradient de $(u, v) \mapsto M(u, v)$ alors que cette notion n'existe pas pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Le mot d'ordre pour mener à bien ce type de question (trouver où une expression s'annule) est « factoriser ».
Peu de candidats ont identifié correctement la nature de l'ensemble des points non réguliers. Nombre d'entre eux ont confondu cet ensemble avec l'ensemble des couples (u, v).

<u>Question 3.b.</u> Il est clair que de nombreux candidats ne font pas le lien entre cette question et la précédente. Près d'un candidat sur deux n'a pas abordé cette question et seuls 23% ont donné une réponse correcte à cette question d'application directe du cours. On trouve de nombreuses équations de plan qui ne contiennent pas de x, y et z, ou qui ne passent pas par $M(u, v)$ ... Il est signalé aux candidats que les correcteurs ne développent pas les déterminants à leur place.

Partie II

Question 1. A part quelques candidats qui ont cru que (u, au) étaient les coordonnées du point et quelques propositions étranges, les coordonnées de $A_a(u)$ sont correctes. Mais les représentations paramétriques proposées n'indiquent que très rarement quel est le paramètre et le lieu de ce paramètre, ou alors, il y en a deux (a et u) ... ce qui ne donne pas en général une courbe.

Question 2.a. La non colinéarité des deux vecteurs est souvent annoncée, bien plus rarement démontrée. On pouvait pour cela utiliser un produit vectoriel, mais pas de produit scalaire, ni de déterminant. Certains candidats semblent penser, à tort, qu'un vecteur et son vecteur dérivée sont toujours orthogonaux. Signalons également que le vecteur nul est colinéaire (et orthogonal) à tous les autres vecteurs.

Question 2.b. On déplore l'attitude de certains candidats qui invoquent le résultat la question I.3.a., alors qu'ils ne l'ont pas traitée.

Question 2.c. Cette question a été peu traitée. Mais les méthodes proposées étaient souvent correctes, même si certaines étaient peu efficaces. Les rares candidats à avoir trouvé les valeurs de a sont ceux qui ont factorisé les expressions utilisées au fur et à mesure.

Partie III

Question 1.a. Cette question a souvent été bien traitée. Peu de candidat ont pensé à vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ étaient orthogonaux et unitaires.

Question 1.b. Un peu plus d'un candidat sur deux donne une bonne réponse à cette question d'application directe du cours. Pour une raison inconnue, il semble qu'un certain nombre de candidats aient cru que Q_2 était l'inverse de Q_1, ce qui n'était pas le cas.

Question 1.c et 1.d. Peu de candidats ont vérifié que les matrices Q étaient orthogonales. Bien que ces matrices s'appellent « orthogonales », leurs colonnes forment une base « orthonormale » de (à préciser impérativement) $\mathbb{R}^3$. Beaucoup de candidats ont cru reconnaître, à tort, la forme réduite de la matrice d'une isométrie, et certains semblent découvrir qu'il existe d'autres angles que les fractions usuelles de π. On trouve de nombreuses contradictions avec ce que les candidats ont annoncé dans la question de cours. Ces questions ont été peu réussies, le vocabulaire est souvent approximatif et il manque régulièrement une conclusion à la fin de la réponse.

Question 2. Moins d'un candidat sur deux donne une réponse correcte à cette question de cours.

Question 3. De très nombreuses erreurs. Si la nouvelle expression n'est pas plus simple que celle de départ, c'est que l'une des formules utilisées doit être fausse, à moins que cela ne soit une erreur de calcul ...

Question 4. 6 candidats sur 10 ont reconnu un problème de Cauchy.

Question 5.a. Si on laisse de côté les fréquentes erreurs de calcul, la plupart des candidats savent diagonaliser une matrice, même si les justifications sont régulièrement fausses ou douteuses. Par contre, la rédaction laisse à désirer (liste non exhaustive) : on trouve une demi-douzaine de notations différentes pour les sous-espaces propres, il convient donc de les définir avec précision. On lit souvent « les valeurs propres sont $\{0, 1, 2\}$ ». On ne sait pas d'où viennent les systèmes. Il n'est pas rare que l'on trouve

$$\text{« } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B_{-2}) \Leftrightarrow \text{... Conclusion : } \mathrm{Ker}(B_{-2}) = \mathrm{Vect}(0, 0, 1) \text{ »}$$

ou encore « $E_0 = \mathrm{Ker}(B_{-2}) \Leftrightarrow$ système ». Quant à ceux qui effectuent des combinaisons linéaires sur les colonnes de la matrice pour trouver son noyau, ils doivent justifier a priori de la dimension de ce même noyau.

Question 5.b. Cette question a été assez peu traitée, mais, lorsque cela est le cas, plutôt avec succès. Précisons que l'on demandait les solutions de S_{-2} et non celles du problème de Cauchy de la question III.4.

Question 5.c., 5.d et 6. Ces questions ont été très peu traitées. On y trouve cependant quelques très bonnes réponses.

Pour finir, un conseil aux futurs candidats : lorsque le temps dévolu à l'épreuve est presque terminé, il est préférable de ne faire qu'une ou deux questions supplémentaires et de les faire bien, plutôt que d'en faire quatre ou cinq et de les bâcler.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Un nombre non négligeable de copies sont beaucoup moins bien présentées que l'an dernier : illisibles, indéchiffrables, raturées de partout, ... Ces copies ont été pénalisées. Des copies sont encore écrites avec une encre si pâle que l'on peine à comprendre ce qui y figure.

En ce qui concerne l'orthographe, elle est encore souvent mise à mal.

Enfin, nous rappelons comme lors de la session précédente que la démonstration d'un résultat passe par l'un ou l'autre des chemins suivants :

- ⇝ Le résultat est la conséquence d'un théorème de cours. En ce cas, il convient de le dire. Si le résultat en question est compliqué, il faut en rappeler l'énoncé. C'était le cas des questions II. 1 et II. 3. *a*. Et une fois cela fait, il convient de montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

- ⇝ Le résultat est la conséquence d'un résultat précédent. Qu'on ait ou non prouvé ce résultat précédent, il convient d'écrire : « D'après le résultat de la question ... ».

- ⇝ Le résultat se déduit d'un calcul, d'une manipulation d'expression, d'un passage à la limite, d'une intégration par parties ... Dans ce cas, il faut dire ce que l'on fait, et ne pas laisser au correcteur le soin de deviner les arguments qui justifient le passage d'une ligne à l'autre dans une page de calculs.

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. On trouve toutefois des copies avec des résultats incorrects, résultant de la non-maîtrise de calculs basiques : $\sqrt{b^2 - 4\,c}$ n'est pas égal à $b^2 - 4\,c$. Quelques candidats donnent la réponse en fonction d'un discriminant qu'ils n'ont pas défini, d'autres laissent un coefficient « a », sans voir qu'il vaut 1. On note aussi quelques erreurs dans les relations coefficients-racines.

   (b) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. On notera que certains candidats se sont lancés dans des calculs très compliqués (pas loin d'une page), en utilisant les expressions avec les radicaux obtenues à la question précédente.

   (c) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de copies, même si de nombreux candidats remplacent $y(t)$ par $e^{r_i t}$, $i = 1, 2$, et vérifient que l'équation est vraie. Par ailleurs, des candidats s'étant trompés sur les relations coefficients-racines du début essayent de faire croire qu'ils ont la solution, en concluant avec des formules du genre « on peut remplacer un + par un − ».

   (d) Cette question a été correctement traitée par environ un tiers des candidats, faute de savoir ce qu'est une solution de $(\mathcal{E}_H)$. De très nombreux candidats (la majorité) partent du résultat en supposant l'existence de C_1 et C_2.

   (e) Comme la précédente, cette question a été correctement traitée par environ un tiers des candidats. Certains candidats évoquent un résultat du cours, sans voir que le but de cette question est de le retrouver. D'autres invoquent le fait que l'espace des solutions est de dimension 2, mais oublient de prouver la liberté de la famille $\left(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\right)$. Enfin, de nombreux candidats résolvent la première équation de la question précédente (en donnant la solution sous la forme de la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre), mais oublient de considérer la seconde équation.

   (f) *i.* Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats, même si on trouve un nombre non négligeable de réponses fausses (en exponentielles diverses, exponentielles-polynômes, fonctions trigonométriques). Il est un peu incroyable de voir des candidats laisser $\sqrt{16}$ à ce niveau !

   ii. Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. Toutefois, des candidats ayant donné une réponse correcte à la question précédente, ne donnent pas la bonne réponse à celle-ci. Un nombre non négligeable de candidats donne la fonction identiquement nulle comme solution. On trouve aussi des solutions en e^{3t}, e^{5t}. Des candidats affirment qu'il y a une infinité de solutions (ou mieux : ≪ deux uniques solutions ≫ !)

2. (a) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats, même si, trop souvent la parabole (bien orientée) est dessinée sans plus de précisions, on ne sait pas ce qu'est le domaine $\mathcal{D}$ pour le candidat. On trouve aussi de nombreuses réponses fantaisistes : carré, rectangle, disque, demi-plan, etc ...

   (b) Cette question a été correctement traitée par un tiers des candidats. Très peu de candidats vérifient que les applications vont bien de $\mathcal{D}$ dans Δ, et réciproquement. Certains pensent que le fait que la fonction h soit à valeurs dans $\mathcal{D}$ suffit pour montrer que h est bijective. On trouve, trop souvent, que la fonction (de deux variables) est ≪ strictement croissante, donc bijective ≫ (SIC). D'autre part, le signe positif devant la racine dans l'expression de l'application réciproque est très rarement justifié, alors que le système est résolu par équivalences.

   La grande majorité des candidats prouve le caractère C^1 par le fait que les fonctions coordonnées sont C^1, très peu montrent que les dérivées partielles sont continues. D'autres, encore, n'ont pas fait attention que les applications en jeu n'étaient pas linéaires, et font intervenir des noyaux. Certains confondent l'application réciproque h^{-1} avec la fonction $\dfrac{1}{h}$.

   (c) Cette question a été correctement traitée par un tiers des candidats, qui montrent avoir compris la dérivation composée. Un nombre non négligeable de candidats ne sait visiblement pas traiter ce type de question, et essaye de noyer le poisson soit en utilisant les réponses de l'énoncé sans rien démontrer, soit à travers une succession de calculs complètement faux où des éléments de $\mathbb{R}^2$ sont considérés comme des réels. Très souvent, la rédaction laisse à désirer. En particulier, peu de candidats concluent correctement quant à l'équivalence.

   (d) Cette question a été correctement traitée par un faible nombre de candidats. Les correcteurs ont noté beaucoup de confusions au niveau des variables : des ≪ t ≫, en lieu et place des ≪ v ≫, des ≪ x ≫, au lieu des ≪ u ≫, etc ...

Partie II

1. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, même si de nombreux candidats proposent une valeur pour β^2, et non pour β.

2. Cette question n'a pas été correctement traitée par tous les candidats. Peu de candidats précisent que la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$, ne font pas mention du fait que le dénominateur ne s'annule pas, et disent que le problème ne se situe

qu'en $+\infty$, et $-\infty$. De même, peu précisent que les équivalents sont positifs.
De nombreuses copies se réfèrent à des intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\,n+2}}$ données comme convergentes. D'autres affirment que comme l'intégrande est de limite nulle en l'infini, alors l'intégrale converge. D'autres, encore, n'ont pas compris la notation « petit o », ou pensent que la variable d'intégration est α. D'autres encore font référence à des séries de Riemann.

En ce qui concerne la valeur de l'intégrale I_0, elle n'est pas toujours correctement donnée. De nombreux candidats obtiennent une valeur nulle.

3. (a) Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats. Parmi ceux-ci, très peu donnent une réponse rigoureuse en se ramenant à une intégration par parties sur un segment. On trouve beaucoup de calculs complètement erronés, avec des arctangentes divers, qui donnent, au bout du compte, la réponse clairement recopiée sur l'énoncé.

   (b) Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Beaucoup donnent une réponse certes correcte, mais sans aucune justification, avec des arguments du type « de façon évidente », ou « par une récurrence évidente ». On trouve, aussi, beaucoup de réponses complètement fausses.

Partie III

1. Cette question, facile, a été correctement traitée par la majorité des candidats, même si certains étudient le cas $\Delta < 0$, ou $\Delta = 0$, sans lire l'énoncé.

   Un nombre non négligeable de candidats pensent que le discriminant est négatif pour x négatif, et donnent alors des racines complexes.
   On trouve aussi des réponses complètement fausses.

2. Cette question n'a pas été correctement traitée par la majorité des candidats. Un certain nombre de copies donnent la réponse $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, ou $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right[$, quand ce ne sont pas des choses fantaisistes comme $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Nous rappelons qu'un intervalle avec une borne $+\infty$ ou $-\infty$ ne peut être fermé en cette borne.

3. Cette question n'a pas été correctement traitée par la majorité des candidats. Les réponses sont souvent très approximatives, avec un produit qui s'arrête à n au lieu de $n-1$. Nous rappelons que les coefficients binomiaux non entiers doivent être redéfinis en cas d'utilisation. Nous avons trouvé, dans de nombreuses copies, des « $\alpha\,!$ », « $\left(\frac{1}{2}\right)!$ ». Enfin, de trop nombreuses copies donnent des développements

en série entière où le « $n\,!$ » est remplacé par un « n ».

4. Cette question n'a pas été souvent correctement traitée. Lorsque c'est le cas, les candidats font souvent une petite erreur à la fin (oubli du signe moins, ou du facteur $\frac{1}{2}$), c'est dommage. La valeur donnée pour le coefficient S_0 est souvent complètement erronée, alors qu'il suffisait de prendre la valeur de la fonction f en zéro. Certains candidats ont heureusement fait un calcul correct, et utilisent un changement d'indice, où la valeur qu'ils donnent pour S_0 est en fait celle de S_1.

5. Cette question n'a pas été souvent correctement traitée, très peu de copies donnent la réponse attendue. Le produit de Cauchy de deux séries entières est confondu avec le produit de Cauchy de deux séries numériques. Des candidats ne semblent pas savoir de quoi il s'agit, confondent produit et somme, ou bien donnent des réponses complètement fantaisistes. Très souvent, les candidats mélangent les indices, ce qui donne des résultats totalement incohérents. On trouve aussi des réponses qui, de façon étonnante, en écho aux questions de la fin, donnent comme réponse :

$$\sum \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \, b_{n-k} \right) x^n$$

En ce qui concerne le résultat sur le rayon de convergence de la série produit, il n'est que très rarement donné.

Dans un nombre important de copies, les candidats confondent développement en série entière et développement limité.

6. Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Elle a permis de différencier les candidats. Même s'ils sont minoritaires, ceux qui ont répondu à cette question l'ont bien traitée, ou, en tout cas, ont donné les bons arguments.

7. Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Lorsque c'est le cas (pour les candidats qui ont obtenu la valeur correcte des S_n), c'est plutôt bien. Un nombre non négligeable de candidats essaye de noyer le poisson en faisant croire qu'ils obtiennent le résultat donné dans l'énoncé. D'autres tentent de répondre à la question en utilisant un raisonnement par récurrence, mais ans utiliser la valeur de S_n définie précédemment.

8. Cette question a été traitée par environ un quart des candidats. Nous avons trouvé une solution originale : le coefficient binomial étant à valeurs entières, on a donc $S_n \geq \frac{1}{n}$, ce qui conduit bien à la divergence de la série de terme général S_n.

   De nombreuses copies confondent la convergence de la série numérique $\sum S_n$, avec celle de la série entière $\sum S_n \, x^n$. Comme l'an dernier, de nombreux candidats veulent appliquer le critère de d'Alembert à la série entière $\sum S_n \, x^n$, mais ne savent pas conclure. Certains ne connaissent visiblement pas l'orthographe correcte de « d'Alembert ».

Certains candidats font un calcul correct et obtiennent bien que le rapport $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ tend vers 4, mais concluent sur la convergence de la série.

9. (a) L'énoncé donnait explicitement les valeurs des coefficients C_1 et C_2. Un nombre non négligeable de copies donne pourtant des réponses complètement différentes. Pour le coefficient C_3, la réponse correcte est en général donnée. Il n'en est pas de même pour C_4. De nombreuses copies donnent des résultats sans aucune justification.
   Les correcteurs ont apprécié les copies expliquant leur raisonnement à l'aide d'un arbre.

   (b) Cette question a été traitée par un faible nombre de candidats, qui ont montré une très bonne compréhension du problème posé. Ces copies ont été valorisées.

   (c) Cette question a été traitée par un faible nombre de candidats. Peu de copies ont exprimé clairement l'idée d'une relation de récurrence similaire. Quelques rares copies ont fait une récurrence forte.
   De nombreux candidats ont tenté un raisonnement par récurrence, mais sans jamais utiliser les caractéristiques des mots de Dyck ! Ce qui ne les empêche pas de conclure que la relation est juste.