Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Le sujet de cette année était constitué d'un problème comprenant un préliminaire de quatre questions de cours, puis de trois parties. La première partie consistait en l'étude de deux surfaces, dont l'une était incluse dans l'autre (lignes de niveaux, plan tangent...). La seconde partie s'intéressait à une famille de courbes tracées sur l'une des surfaces précédentes. Enfin, la dernière partie avait pour objet de déterminer la nature de l'une de ces courbes, avant de montrer qu'il s'agissait d'une courbe intégrale d'un système différentiel.

Les résultats sont très contrastés, mais globalement un peu décevants pour un problème dont beaucoup de questions étaient des applications directes du cours. Si on trouve peu de copies vides, on trouve par contre près de 7 % de copies où le nombre de questions traitées avec succès ne dépasse pas le nombre de questions de cours du préliminaire. On trouve également quelques très bons candidats ayant traité avec succès la quasi-totalité du sujet. Les questions de cours ou d'application directe du cours sont trop souvent négligées (voir le détail question par question). Les correcteurs ne peuvent que conseiller aux futurs candidats d'apprendre et de maîtriser leur cours.

La présentation des copies s'est peu améliorée cette année. Si heureusement, on compte très peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, à peine un candidat sur deux $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture ...
Par ailleurs, il est rappelé (Cf. la notice du concours) que « les épreuves doivent être écrites à l'encre bleue et/ou noire, exception faite pour des schémas ou graphiques nécessitant une palette plus large de couleurs d'encre alors autorisées ». L'usage de stylos dont l'encre est susceptible de traverser le papier est également à éviter.
Encore plus que les années précédentes, l'orthographe de très nombreuses copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figurent dans l'énoncé soient correctement orthographiés, et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), parabole, cartésien(ne), colonne, gradient ... On note également une nette dégradation de la grammaire : accord genre et/ou nombre, mais aussi conjugaison. On ne devrait pas trouver chez de futurs ingénieurs, qui auront à communiquer par écrit, des erreurs du type « on calcul » ou « on a (ou on à) montrer ». Dans certaines copies, la situation est telle que les correcteurs ne parviennent pas à comprendre ce que les candidats essayent de dire.

On constate également de nombreuses confusions de vocabulaire et/ou de notions : u et $\vec{u}$, discriminant et déterminant, isomorphisme et isométrie, équation, coordonnées et paramétrage, plan tangent et tangente, sommet, centre et origine, courbe et surface, résoudre et calculer, vecteur propre et sous-espace propre, composée et combinaison...
De plus, un peu plus d'attention vis à vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une surface ou une courbe, calculer le déterminant de deux vecteurs de l'espace, de dire que le produit vectoriel de deux vecteurs est positif ...

Les candidats sont également invités à respecter les notations de l'énoncé.

Avant de passer au détail question par question, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre ...

Questions de cours.

Les quatre questions de cours portaient sur des thèmes qui étaient repris dans la suite du sujet avec les mêmes notations. Cela a permis de déterminer si les candidats ne traitent pas certaines questions à cause du cours non su, ou parce qu'ils ne parviennent pas à mettre en œuvre celui-ci. Les résultats sont les suivants : 11 % des candidats donnent 4 bonnes réponses, 16 % donnent 3 bonnes réponses, 24 % donnent 2 bonnes réponses, 28 % donnent 1 bonne réponse et parmi les 21 % de candidats ne donnant aucune bonne réponse, 1 sur 7 n'a répondu à aucune des 4 questions. En ce qui concerne les points réguliers d'une surface paramétrée, seuls 37 % des candidats donnent la bonne réponse, par contre, 63 % des candidats donnent une définition correcte d'une matrice orthogonale. Malheureusement, seuls 23 % des candidats connaissent la nature d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et savent comment l'identifier.

Partie I

<u>Questions 1.a. et 1.b.</u> La majorité des candidats ont identifié correctement une droite et une parabole, mais la surface S a été peu souvent reconnue comme étant une surface réglée. De plus, il est rappelé aux candidats qu'une représentation cartésienne d'une courbe de l'espace s'écrit avec deux équations et que, dans l'espace, $z = ay + b$ est une équation de plan. Enfin, signalons que nombre de candidats ont fait du zèle en donnant des éléments caractéristiques des courbes identifiées. Malheureusement, le sommet de la parabole avait souvent l'une de ses coordonnées fausse ; quant à la pente, le coefficient directeur et l'ordonnée (ici le terme « cote » aurait été plus approprié) à l'origine de la droite, ce sont des notions qui n'ont pas été définies dans l'espace.

<u>Question 1.c.</u> Lorsqu'elle est traitée, l'étude de la conique est souvent bien faite. Mais il est clair que de nombreux candidats appliquent une « recette » sans en comprendre le sens. En effet, l'étude est souvent complète, y compris la gestion de la partie linéaire (inexistante ici...) alors que pour répondre à la première partie de cette question, seules les valeurs propres de la matrice sont utiles. De plus, presqu'aucun candidat n'est capable d'exploiter son étude pour construire les courbes (les axes du nouveau repère sont souvent devenus les

asymptotes de l'hyperbole). Enfin, de nombreux candidats qui utilisent la bonne formule pour trouver les coordonnées d'un point de la conique dans le nouveau repère, ne donnent pas la bonne réponse à la question III.2.
Par ailleurs, le cas $\gamma = 0$ a souvent été mal géré. De nombreux candidats supposent sans raison que $y \neq 0$; quant à ceux qui n'oublient pas le cas $y = 0$ (dans le plan (xOy)), certains y reconnaissent un plan et d'autres un point.
En ce qui concerne le tracé, celui-ci doit être effectué sur la feuille de papier millimétré qui est distribuée à cet effet. Cette année, de nombreux candidats l'ont effectué sur leur copie ou au dos de la feuille de papier millimétré. Il est rappelé que cette feuille doit être rendue avec la copie même si elle n'a pas été utilisée.
Peu de candidats ont mené le tracé à bien. Il est impératif que les candidats fassent figurer le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sur leur copie. De plus, comme il y a plusieurs courbes, il convient d'utiliser des couleurs différentes et de mettre une légende.
Signalons enfin que la droite du plan d'équation $y = 0$ est l'axe des abscisses.

Question 1.d. Un peu moins d'un candidat sur deux donne une réponse correcte à cette question qui est une application directe du cours. On remarque que de nombreux candidats ont pris le temps de définir la fonction dont ils allaient calculer le gradient.

Question 1.e. Peu de candidats ont répondu à cette question. Certains confondent la position relative de la surface et de son plan tangent avec la nature du point critique de la fonction associée. On note quelques utilisations de la matrice Hessienne (ou du développement limité à l'ordre 2) d'une fonction à trois variables.

Question 2.a. Cette question a été généralement traitée avec succès à condition de ne pas être trop regardant sur la rédaction et/ou l'efficacité des calculs.

Question 2.b. Pour cette question, il convenait de donner explicitement un point qui appartenait à S et pas à Σ en exploitant, par exemple, le fait que l'ordonnée des points de Σ est positive.

Question 3.a. Les résultats de la première question de cours donnent une idée de ceux de cette question. De nombreux candidats évoquent le gradient de $(u,v) \mapsto M(u,v)$ alors que cette notion n'existe pas pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Le mot d'ordre pour mener à bien ce type de question (trouver où une expression s'annule) est « factoriser ».
Peu de candidats ont identifié correctement la nature de l'ensemble des points non réguliers. Nombre d'entre eux ont confondu cet ensemble avec l'ensemble des couples (u,v).

Question 3.b. Il est clair que de nombreux candidats ne font pas le lien entre cette question et la précédente. Près d'un candidat sur deux n'a pas abordé cette question et seuls 23% ont donné une réponse correcte à cette question d'application directe du cours. On trouve de nombreuses équations de plan qui ne contiennent pas de x, y et z, ou qui ne passent pas par $M(u,v)$ ... Il est signalé aux candidats que les correcteurs ne développent pas les déterminants à leur place.

Partie II

Question 1. A part quelques candidats qui ont cru que (u, au) étaient les coordonnées du point et quelques propositions étranges, les coordonnées de $A_a(u)$ sont correctes. Mais les représentations paramétriques proposées n'indiquent que très rarement quel est le paramètre et le lieu de ce paramètre, ou alors, il y en a deux (a et u) ... ce qui ne donne pas en général une courbe.

Question 2.a. La non colinéarité des deux vecteurs est souvent annoncée, bien plus rarement démontrée. On pouvait pour cela utiliser un produit vectoriel, mais pas de produit scalaire, ni de déterminant. Certains candidats semblent penser, à tort, qu'un vecteur et son vecteur dérivée sont toujours orthogonaux. Signalons également que le vecteur nul est colinéaire (et orthogonal) à tous les autres vecteurs.

Question 2.b. On déplore l'attitude de certains candidats qui invoquent le résultat la question I.3.a., alors qu'ils ne l'ont pas traitée.

Question 2.c. Cette question a été peu traitée. Mais les méthodes proposées étaient souvent correctes, même si certaines étaient peu efficaces. Les rares candidats à avoir trouvé les valeurs de a sont ceux qui ont factorisé les expressions utilisées au fur et à mesure.

Partie III

Question 1.a. Cette question a souvent été bien traitée. Peu de candidat ont pensé à vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ étaient orthogonaux et unitaires.

Question 1.b. Un peu plus d'un candidat sur deux donne une bonne réponse à cette question d'application directe du cours. Pour une raison inconnue, il semble qu'un certain nombre de candidats aient cru que Q_2 était l'inverse de Q_1, ce qui n'était pas le cas.

Question 1.c et 1.d. Peu de candidats ont vérifié que les matrices Q étaient orthogonales. Bien que ces matrices s'appellent « orthogonales », leurs colonnes forment une base « orthonormale » de (à préciser impérativement) $\mathbb{R}^3$. Beaucoup de candidats ont cru reconnaître, à tort, la forme réduite de la matrice d'une isométrie, et certains semblent découvrir qu'il existe d'autres angles que les fractions usuelles de π. On trouve de nombreuses contradictions avec ce que les candidats ont annoncé dans la question de cours. Ces questions ont été peu réussies, le vocabulaire est souvent approximatif et il manque régulièrement une conclusion à la fin de la réponse.

Question 2. Moins d'un candidat sur deux donne une réponse correcte à cette question de cours.

Question 3. De très nombreuses erreurs. Si la nouvelle expression n'est pas plus simple que celle de départ, c'est que l'une des formules utilisées doit être fausse, à moins que cela ne soit une erreur de calcul ...

Question 4. 6 candidats sur 10 ont reconnu un problème de Cauchy.

Question 5.a. Si on laisse de côté les fréquentes erreurs de calcul, la plupart des candidats savent diagonaliser une matrice, même si les justifications sont régulièrement fausses ou douteuses. Par contre, la rédaction laisse à désirer (liste non exhaustive) : on trouve une demi-douzaine de notations différentes pour les sous-espaces propres, il convient donc de les définir avec précision. On lit souvent $\ll$ les valeurs propres sont $\{0, 1, 2\}$ $\gg$. On ne sait pas d'où viennent les systèmes. Il n'est pas rare que l'on trouve

$$\ll \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B_{-2}) \Leftrightarrow \ldots \text{ Conclusion : } \mathrm{Ker}(B_{-2}) = \mathrm{Vect}(0, 0, 1) \gg$$

ou encore $\ll E_0 = \mathrm{Ker}(B_{-2}) \Leftrightarrow$ système $\gg$. Quant à ceux qui effectuent des combinaisons linéaires sur les colonnes de la matrice pour trouver son noyau, ils doivent justifier a priori de la dimension de ce même noyau.

Question 5.b. Cette question a été assez peu traitée, mais, lorsque cela est le cas, plutôt avec succès. Précisons que l'on demandait les solutions de S_{-2} et non celles du problème de Cauchy de la question III.4.

Question 5.c., 5.d et 6. Ces questions ont été très peu traitées. On y trouve cependant quelques très bonnes réponses.

Pour finir, un conseil aux futurs candidats : lorsque le temps dévolu à l'épreuve est presque terminé, il est préférable de ne faire qu'une ou deux questions supplémentaires et de les faire bien, plutôt que d'en faire quatre ou cinq et de les bâcler.