Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

L'oral de mathématiques I consiste en une interrogation au tableau sans préparation, d'une durée de 30 minutes. L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Le but de cet oral est de juger et d'évaluer :

- les connaissances ;
- le savoir-faire technique et les capacités mathématiques ;
- l'imagination et l'adaptabilité dans une situation un peu nouvelle des candidats.

Afin de juger de la performance de ceux-ci, l'examinateur prend en compte les éléments suivants (liste non exhaustive) :

- la compréhension du problème posé ;
- les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter) ;
- la précision du langage et la connaissance précise du cours, la capacité d'envisager différentes méthodes et de réfléchir à leurs utilisations ;
- la justification précise de ce qui est fait ;
- la maîtrise du raisonnement mathématique : la plupart des candidats sont incapables d'être précis pour énoncer une condition nécessaire et suffisante (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, caractérisation des endomorphismes trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique, par exemple). On a droit à un vague « si », et les investigations révèlent que les candidats ne savent même pas trop dans quel sens ils étaient en train de l'énoncer.
- l'organisation et la présentation du tableau, la qualité de l'expression orale : nous rappelons que les sujets des phrases doivent être corrects pour que le raisonnement

soit rigoureux (les phrases qui commencent par « ça converge », finissent assez souvent mal quand on demande ce qu'est le « ça »).

Certains exercices sont longs, le jury n'attend pas nécessairement des candidats qu'ils finissent ceux-ci ; un candidat ayant très bien traité une proportion raisonnable d'un exercice long, peut ainsi avoir une note très satisfaisante.

En fin de planche d'oral, cinq minutes sont réservées à des questions de cours. Parmi les questions posées cette année - entre autres, et toujours très, très classiquement : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition d'un produit scalaire, la formule de Taylor-Young (et son utilité), la formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le théorème des accroissements finis, la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable à l'aide des dimensions des sous-espaces propres, définition et propriété de la trace, trace d'un projecteur, formules de Frenet (et utilité), suites adjacentes, définition et caractéristiques des isométries, caractérisation des projecteurs, caractérisation des symétries, matrices orthogonales, développements en série entière classiques, continuité/dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, énoncer la loi faible des grands nombres, donner les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, ...

Nous rappelons enfin que lors d'un oral, les automatismes sans raisonnement fondé mettent gravement en péril le candidat. En outre, il est inutile de demander confirmation de la justesse d'une réponse à l'examinateur. Enfin, une fois qu'une chose a été dite par le candidat et relevée par l'examinateur, il est totalement inutile de perdre du temps à l'écrire.

Pour conclure ces remarques par une note positive, nous signalons que la qualité de l'expression et des présentations en regard était bonne.

Remarques particulières

Le jury a été frappé cette année par l'extrême écart entre les candidats, pourtant tous admissibles. À côté de candidats d'excellent niveau, qui maîtrisent leur sujet et qui ont du cours une connaissance parfaite, nombre d'autres se révèlent incapables de faire quoi que ce soit sur l'exercice qu'on leur propose, faute de connaître parfois le sens des mots utilisés. Une question de cours sur un sujet différent donne en général alors le même résultat. Certains avouent même « avoir fait une impasse » sur tel ou tel sujet.

Des candidats tentent (même brièvement) de présenter le type d'exercice sur lequel on leur demande de travailler, c'est très appréciable. Certains d'entre eux le font très bien. Cela permet au candidat d'identifier et mobiliser les connaissances en jeu, d'entamer le dialogue avec le jury, et sans doute d'être moins inquiet sur le déroulement de l'oral. A l'opposé, certains candidats parlent face au tableau, ne se tournent pas vers le jury et présentent à peine leurs calculs (même lorsque cela leur est demandé). Il est difficile dans ces conditions de mettre en avant ses compétences mathématiques.

Il est important que les candidats comprennent le danger qu'il y a à faire l'impasse sur une question, et pire encore sur tout un morceau de programme. Ce qui a été le cas souvent du calcul des probabilités. À ce propos, qu'il soit permis au jury de rappeler :

- Les probabilités font partie du programme.
- Le formalisme introduit par le programme doit être connu et utilisé, et qu'il est fait pour rendre corrects des raisonnements qui autrement sont souvent approximatifs.
- La part de cette question tant à l'écrit qu'à l'oral ne peut qu'augmenter.

Pour donner un exemple concret des difficultés rencontrées, mentionnons que la question « qu'est-ce qu'une variable aléatoire ? », qu'on pose par exemple lorsque le candidat parle de « la probabilité de X », conduit généralement à des réponses fantaisistes. Nombre de candidats se révèlent incapables de dire « c'est une application définie sur Ω », ou même « c'est une application ».

Voici pour conclure une liste de fautes et d'ignorances relevées pendant la session d'oral 2015.

En algèbre

- Une fois donnée la définition, les propriétés de la trace sont mal connues. On a vu « $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$ », et aussi « $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA)$ ».
- Certains candidats ignorent la formule donnant l'inverse d'un produit de matrices.
- Certains candidats semblent ignorer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre.
- Certains candidats mélangent les résultats sur la diagonalisabilité des endomorphismes, affirment qu'un endomorphisme orthogonal est toujours diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, par exemple.
- Moins d'un candidat sur deux est en mesure de donner une définition propre d'une matrice symétrique (en général, ils donnent des exemples ou une vague explication sur un dessin, mais rien de mathématique ...). Quant à citer le théorème de réduction associé, outre le classique oubli du fait qu'il faut que la matrice soit réelle, très peu de candidats sont capables d'aller plus loin que « diagonalisable », et ceux qui y parviennent disent en général qu'elle est « diagonalisable dans une base orthonormale »,

ce qui ne veut pas dire grand chose pour une matrice, et se révèlent incapables d'expliquer ce que cela signifie vraiment.

- La notion de projeté orthogonal est souvent mal comprise. L'expression de la projection orthogonale sur un droite dont on connaît un vecteur directeur est parfois inconnue. Dans le même ordre d'idées, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est connu, mais son interprétation géométrique ignorée.

- La définition d'une isométrie vectorielle est souvent calamiteuse.

En Analyse

- La règle de d'Alembert est toujours l'occasion de fautes classiques. Le jury a été frappé de constater que des candidats ne savaient pas quoi dire lorsque $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq a < 1$ sans que la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe ou qu'on puisse facilement en calculer la valeur.

- Très peu de candidats interrogés savent énoncer correctement les formules de Taylor. Le reste intégral dans la formule du même nom est parfois très très loin du théorème. Ainsi, il est très difficile de demander au candidat d'appliquer cette formule pour obtenir des résultats très classiques ($\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ par exemple).

- La forme générale et les théorèmes concernant le produit de Cauchy sont très rarement donnés correctement.

- Les interversions entre limites et intégrales, ou limites et sommes infinies, ne sont pas toujours maîtrisées. Beaucoup de candidats font référence à la série géométrique, quand ils manipulent une somme partielle (mêmes lorsqu'ils appliquent correctement la formule ensuite).

- Les développements en série entière des fonctions usuelles (l'exponentielle, la fonction qui, à tout réel $x > -1$, associe $\ln(1 + x)$, ...) ne sont parfois pas connus par cœur. Et leurs preuves alors sont inconnues. La plupart du temps, il est impossible d'obtenir l'*énoncé* du théorème d'intégration terme à terme des séries entières.

- Quelques erreurs classiques ou moins classiques à éviter : ce n'est pas parce que u_n tend vers zéro à l'infini, que $\sum u_n$ converge, et de même pour les intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$, ce n'est pas parce qu'une fonction f admet une limite nulle en l'infini, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

- Si g est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et f une fonction dérivable dont l'image est dans $[a, b]$, de très nombreux candidats ne savent pas justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^{f(x)} g(t)dt$, est dérivable et encore moins calculer sa dérivée.

- Quand il s'agit d'étudier la convergence d'une intégrale impropre de la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, beaucoup de candidats étudient localement l'intégralité au voisinage de $x = a$ et $x = b$, mais ne sont pas capables de donner un argument simple pour justifier de l'intégrabilité de f sur tout segment inclus dans $]a, b[$.

- Les candidats sont en grande difficulté pour justifier de l'intégrabilité à l'infini de la fonction qui, à tout réel positif t, associe $t^n\, e^{-t}$, alors même que le nouveau programme leur permet, par rapport à l'ancien, de conclure directement avec un $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

- Si f est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^\star$, de classe C^1, la dérivée de la fonction $t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$ n'est très souvent pas connue.

- Le théorème de relèvement ne semble pas connu d'un certain nombre de candidats.

- Certains candidats ne savent pas étudier les extrema d'une fonction numérique de deux variables réelles. Certains veulent utiliser des outils de calcul différentiel sur les fonctions de plusieurs variables, et invoquent même, en justification, le fait que cette étude via le signe de $rt - s^2$ est hors programme (ce qui est juste), mais ne savent pas étudier ces extrema via la réduction de la matrice Hessienne (ou en appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2) : qui est au programme !

En géométrie

- La notion de courbure, et les formules de Frenet sont au programme.

- La détermination de l'aspect local d'une courbe paramétrée au voisinage d'un point stationnaire peut s'obtenir facilement en faisant un développement limité. Certains candidats l'ignorent.

- Une partie des candidats est très peu à l'aise avec la géométrie : il n'est pas admissible d'ignorer l'équation de la tangente en un point d'une courbe définie par $y = f(x)$. Certains ne parviennent pas à obtenir rapidement l'équation d'une normale à une courbe paramétrée du plan. Cela vient parfois du fait qu'ils ne maîtrisent pas bien les outils d'algèbre linéaire (déterminant, produit scalaire), ou ont des difficultés pour les réinvestir. Il faudrait penser à systématiquement faire un dessin.
  Les notions de géométrie dans l'espace sont ainsi très mal maîtrisées (équation cartésienne d'un plan, vecteur normal à un plan, produit vectoriel...). Les exercices sur ce sujet ont posé d'énormes difficultés aux candidats ; il était très délicat de les guider dans ces conditions.

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats ont besoin d'être guidés pour calculer la distance d'un point à un plan.

En calcul des probabilités

- $\rightsquigarrow$ D'une manière générale, les candidats peinent à travailler, formellement, dans un cadre rigoureux pour le calcul des probabilités. Une variable aléatoire réelle n'est en général pas présentée comme une *application* de Ω dans $\mathbb{R}$ (décrire l'univers, sous forme ensembliste, même dans le cadre d'expériences aléatoires simples, est d'ailleurs souvent très difficile pour le candidat). Beaucoup de candidats semblent ignorer ce que sont des variables aléatoires indépendantes. A titre d'illustration, le jury a entendu à plusieurs reprises des candidats affirmer que des variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si $P(X \cap Y) = P(X)\,P(Y)$, ce qui n'a bien sûr aucun sens.

- $\rightsquigarrow$ Ignorance des lois classiques (Le jury renonce à reproduire ce qu'il a vu !).

- $\rightsquigarrow$ Ignorance des inégalités de Markov et Bienaymé -Tchebychev.

- $\rightsquigarrow$ La notion d'événement est souvent très mal comprise : confusion entre ≪ A et B sont deux événements incompatibles ≫ et ≪ A et B sont deux événements indépendants ≫. Les candidats confondent souvent l'événement et sa probabilité, et il n'est pas rare de voir écrites des formules du type ≪ $P(A) \cap P(B)$ ≫, par exemple. Le raisonnement sur les événements, avant de se lancer dans un calcul des probabilités, permettrait aux candidats d'obtenir des résultats rigoureusement.

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats ne savent pas expliquer ce que permet de modéliser une variable aléatoire suivant une loi binomiale (obtenir les mots ≪ succès ≫, ≪ Bernoulli ≫, ≪ indépendantes ≫... est parfois impossible).

- $\rightsquigarrow$ Il y a un argument simple, au moins heuristique, pour faire apparaître la loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, en calculant $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y = k)$ lorsque $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Très peu de candidats savent mener ce calcul jusqu'au bout, alors que ce calcul de limite est élémentaire.

- $\rightsquigarrow$ Presqu'aucun candidat ne sait énoncer la loi faible des grands nombres (en question de cours).

- $\rightsquigarrow$ A la question ≪ à quoi servent les séries génératrices ? ≫, on obtient souvent le calcul de l'espérance et de la variance, mais sans les conditions d'existence, très rarement le fait que la fonction génératrice caractérise la loi, jamais le fait que la fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions génératrices.

$\rightsquigarrow$ La formule de transfert n'est quasiment jamais connue. Les rares fois où l'on obtient une réponse avec une formule « correcte » (en attribuant cette qualité aux formules énoncées dans le cadre restrictif de fonctions à valeurs dans $\mathbb{N}$, ou dans un ensemble fini), le contexte n'est pas précisé (que sont X, f ?), et les conditions d'existence de $E\left(f(X)\right)$ ne sont jamais citées (ou alors de façon erronée, les très rares candidats qui se préoccupent de la question affirmant que $f(X)$ a une espérance lorsque X en a une).