Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Le sujet est composé de 3 parties.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Tournez la page S.V.P

Première Partie

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice <u>orthogonale</u> P telle que $A = PDP^{-1}$.
   Les coefficients de la diagonale de D seront classés par ordre <u>croissant</u> et les coefficients de la première ligne de P seront tous positifs.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6. Soient A', D' et P' trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' est orthogonale et $A' = P'D'P'^{-1}$.
   La matrice A' est-elle symétrique ?

Deuxième Partie.

Dans cette partie, on confond une matrice à une ligne et une colonne avec son unique coefficient.
Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et de sa base canonique $\mathcal{B} = (i,\, j,\, k)$. On note $<\,,\,>$ le produit scalaire usuel.
La matrice A est celle qui a été définie dans la première partie et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$, on note $\varphi(u,v) = {}^tUAV$ où U et V sont les matrices colonnes des coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$.

1. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est U, on considère la matrice colonne $U' = {}^tPU = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où P est la matrice déterminée dans la première partie.
   (a) Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
   (b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Que représente U' pour le vecteur u ? On sera le plus précis possible.
   (c) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $\varphi(u,u)$ en fonction de D et U' puis de x', y' et z'.
   (d) En déduire que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Soient u et v deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Démontrer que u et v sont orthogonaux pour le produit scalaire φ.
   (b) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire φ.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note F_u son orthogonal pour le produit scalaire $<\,,\,>$ et F'_u celui pour le produit scalaire φ.

3. Justifier que si u est un vecteur propre de f alors $F_u = F'_u$.

4. (a) Donner une base de F_i où i est le premier vecteur de la base canonique.
   (b) Déterminer une base de F'_i.
   (c) A-t-on $F_i = F'_i$? Déterminer une base de $F_i \cap F'_i$.
5. (a) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que si $v \in F'_u$, alors $f(v) \in F_u$.
   (b) Démontrer que pour tous vecteurs v et w de $\mathbb{R}^3$, $< f(v), w >=< v, f(w) >$.
6. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $F_u = F'_u$.
   (a) Démontrer à l'aide de la question 5. que $f(F_u) = F_u$.
   (b) En déduire que $f(u)$ est orthogonal à F_u pour le produit scalaire $< \, , \, >$ puis que u est un vecteur propre de f.

Troisième Partie : Jouons au golf.

1. Dans l'un de ses sacs de golf, Anna a rangé trois clubs de golf dont un putter.
   Elle tire au hasard et sans remise un club de golf de son sac jusqu'à ce qu'elle obtienne son putter.
   On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où le putter a été tiré et pour i entier supérieur ou égal à 1, on note C_i l'événement ≪ Le putter a été tiré lors du i-ème tirage ≫.
   (a) Déterminer et reconnaitre la loi de X.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
2. Pour jouer, Anna a également à sa disposition un seau de balles de golf contenant 44 balles blanches et 4 balles jaunes.
   Au début de chaque trou, Anna tire au hasard une balle dans le seau, note sa couleur, joue le trou puis la remet dans le seau.
   Un parcours de golf comprend 18 trous.
   Soit J la variable aléatoire égale au nombre de balles jaunes utilisées lors de <u>deux</u> parcours.
   (a) Reconnaitre la loi de J. Une réponse argumentée est attendue.
   Préciser $J(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par J ainsi que la probabilité $P(J = k)$ pour tout k de $J(\Omega)$.
   (b) En moyenne, avec combien de balles jaunes, Anna a-t-elle joué lors des deux parcours ?
3. Soit J' une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
   (a) Pour quelle valeur de λ, les variables aléatoires J et J' ont-elle la même espérance ?
   (b) Donner la valeur de $P(J' = 9)$ et celle de $P(J' \geqslant 1)$ sans signe Σ.

   On admet que pour la valeur de λ précédente, $P(J' = k)$ est une valeur approchée de $P(J = k)$ et on donne pour certaines valeurs de k, le tableau de la <u>fonction de répartition</u> F de la variable aléatoire J'.

k	0	1	2	3	4	5	6
$F(k)$	0.0498	0.1991	0.4232	0.6472	0.8153	0.9161	0.9665

k	7	8	9	10	11	12	13
$F(k)$	0.9881	0.9962	0.9989	0.9997	0.9999	1	1

(c) Donner alors une valeur approchée des probabilités des événements suivants :
   - ≪ Anna a tiré au plus 3 balles jaunes ≫
   - ≪ Anna a tiré 7 balles jaunes ≫
   - ≪ Anna a tiré au moins 10 balles jaunes ≫

4. Un autre joueur, Anthony, s'entraîne sur le premier trou du parcours.
Il réussit le par sur ce trou s'il rentre la balle dans le trou en exactement 4 coups.
Il est au-dessous du par s'il rentre la balle dans le trou en 3 coups maximum et il est au-dessus du par dans les autres cas.
Anthony a constaté que : pour tout entier naturel n,

   - si lors du n-ème entraînement, il est au-dessous du par, alors lors de l'entraînement suivant, il reste au-dessous du par avec une probabilité de $\dfrac{5}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\dfrac{1}{8}$.
   - si lors du n-ème entraînement, il réussit le par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$, il réussit le par avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\dfrac{1}{4}$.
   - si lors du n-ème entraînement, il est au-dessus du par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec la probabilité de $\dfrac{1}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ et il reste au-dessus du par avec une probabilité de $\dfrac{5}{8}$.

On note A_n, B_n et C_n les événements ≪ Anthony est au-dessous du par lors du n-ème l'entraînement ≫, ≪ Anthony réussit le par lors du n-ème l'entraînement ≫ et ≪ Anthony est au-dessus du par lors du n-ème l'entraînement ≫ et a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.
Lors du dernier échauffement, considéré comme l'entraînement numéro 0, Anthony réussit le par.
On a donc $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

(a) Donner les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

(b) Donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
Chaque valeur devra être justifiée par une phrase, éventuellement extraite de l'énoncé.

(c) Etablir pour tout entier naturel n que $a_{n+1} = \dfrac{5}{8}a_n + \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{8}c_n$.

(d) Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Aucune justification n'est demandée.

Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(e) Donner une relation entre G_{n+1}, G_n et la matrice A de la première partie.

(f) Ecrire des commandes Python permettant de calculer et d'afficher la probabilité qu'Anthony réussisse le par lors du 20-ème entraînement.
On supposera, si nécessaire, le module numpy chargé par la commande :

```
from numpy import *
```

(g) Donner sans démonstration la relation entre G_n, G_0, A et n.

(h) En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

(i) Que valent $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$?
Interpréter le résultat.

5. Un autre jour, Anthony s'entraîne à sortir une balle du bunker (zone remplie de sable). La probabilité qu'il arrive à sortir la balle du premier coup est $p_1 = \dfrac{1}{2}$. Puis à cause de la fatigue, la probabilité qu'il arrive à sortir la balle du bunker à la n-ème tentative ($n \geqslant 2$), sachant qu'il a échoué aux précédentes est $p_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k l'événement : $\ll$ la balle sort du bunker à la k-ème tentative $\gg$ et on considère la variable aléatoire T égale au numéro de la tentative où la balle sort du bunker et on convient que T prend la valeur 0 lorsque l'événement $\ll$ la balle ne sort jamais du bunker $\gg$ est réalisé.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{0\,;-1\}$,
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

(b) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer l'événement $(T = n)$ à l'aide des événements S_k pour des valeurs de k bien choisies.

(c) En déduire $P(T = n)$ pour tout $n \geqslant 2$.
Cette formule est-elle valable aussi pour $n = 1$?

(d) Chaque tentative pour sortir la balle du bunker prend 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'Anthony arrive à sortir la balle du bunker en une heure ou moins ?

(e) Calculer $P(T = 0)$.

(f) i. Ecrire la série génératrice G_T de T. Déterminer soigneusement son rayon de convergence.

ii. Exprimer G_T à l'aide des fonctions usuelles.

(g) La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?