BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Les 3 parties du sujet sont indépendantes.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Première Partie.

Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Sa base canonique sera notée (e_1, e_2).
Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ ou z_r sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ ou z_i sa partie imaginaire, $|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient a et b deux nombres complexes. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = az + b\overline{z}.$$

ainsi que la fonction $g_{a,b}$ qui à tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe $\mathrm{Aff}(u) = z$ associe le vecteur v de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe $f_{a,b}(z)$.

1. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ d'affixes complexes respectives z_1 et z_2. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Justifier la réponse.
   (a) $(z_1, z_2) = (-4i, 0)$.
   (b) $(z_1, z_2) = (3 - i, i(3 - i))$.
   (c) $(z_1, z_2) = (3 + i, i - 3)$.
   (d) $(z_1, z_2) = \left(\dfrac{1}{1+i}, -3e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$.
2. Démontrer que $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. On note $G = \{g_{a,b}; (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.
   (a) Démontrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Démontrer que $G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. On pourra s'intéresser à la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$.
4. (a) Reconnaître (on ne demande pas de justification) $g_{a,b}$ lorsque
   (i) $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b = 0$.
   (ii) $a = e^{i\theta}$ et $b = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (iii) $(a, b) = (0, 1)$.
   (b) En déduire que pour $(a, b) = (e^{i\theta}, 0)$ et $(a', b') = (0, 1)$, $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Est-elle positive (ou directe) ? Donner sa nature et ses éléments caractéristiques.
5. (a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux espaces vectoriels supplémentaires dans E, s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Rappeler quelle est la relation entre s, p et l'application identité notée id.
   (b) En déduire un couple de complexes (a, b) pour lequel $g_{a,b}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_α d'affixe complexe $e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. Ecrire la matrice $G_{a,b}$ de $g_{a,b}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
7. On suppose dans cette question uniquement que $a \in \mathbb{R}$. La matrice $G_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Que dire de plus sur ses sous-espaces propres ?
8. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de $G_{a,b}$.
   (b) On suppose que $|b|^2 \neq (\mathrm{Im}(a))^2$. La matrice $G_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Discuter en fonction de a et b.
   (c) On suppose que $|b|^2 = (\mathrm{Im}(a))^2$. Démontrer que $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.
   (d) A quelle(s) condition(s), $g_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?

Deuxième partie.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère la surface S d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=1$.

1. Allure de S.
   (a) Déterminer la nature de l'intersection de S avec le plan d'équation $x=0$.
   (b) Déterminer la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $z=a$ où $a\in\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour S ?
   (c) Utiliser les informations précédentes pour tracer sur la copie l'allure de S. On n'oubliera pas de placer les axes du repère.
2. Quelques symétries de S.
   (a) Justifier que le plan d'équation $z=0$ est un plan de symétrie de S. On admettra qu'il en est de même des plans d'équation $x=0$ et $y=0$.
   (b) Donner un autre plan de symétrie de S (distinct des trois plans précédents). Justifier la réponse.
   (c) Justifier que la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ est un axe de symétrie de S.
3. Soit Σ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la droite Δ d'équations $\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$ autour de l'axe (Oz).
   (a) En déterminant une équation cartésienne de Σ, démontrer que $\Sigma=S$.
   (b) En déduire que S est une surface réglée. En donner une famille de génératrices.
4. L'objectif de cette question est de déterminer toutes les droites qui sont incluses dans S. On dit qu'une droite est horizontale si elle est incluse dans un plan parallèle au plan d'équation $z=0$.
   On note $O(2)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que S ne contient aucune droite horizontale.
   (b) Soit D une droite non horizontale. Justifier qu'il existe 4 réels a, b, α et β tels que $\begin{cases} x=a+\alpha t \\ y=b+\beta t \\ z=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ soit une représentation paramétrique de D.
   (c) Démontrer que : $D\subset S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}\in O(2)$.
   (d) Donner la forme des matrices appartenant à $O(2)$. Pour chacune d'elles, préciser quel est l'endomorphisme canoniquement associé.
   (e) En déduire toutes les droites incluses dans S.

Troisième partie.

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère alors la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta\sin(\theta) \end{cases}, \ \theta \in [0;2\pi].$$

Pour $\theta \in [0;2\pi]$, on note $M(\theta)$ le point de Γ de paramètre θ.

1. (a) Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de l'affixe complexe $z(\theta)$ de $M(\theta)$.
   (b) Calculer la dérivée sur $[0;2\pi]$ de la fonction $\theta \mapsto z(\theta)$.
   (c) En déduire la valeur de $\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) \right\|$ pour $\theta \in [0;2\pi]$ et préciser quels sont les points réguliers de Γ.
2. On considère la fonction f définie sur $D = [0;2\pi] - \left\{ \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2} \right\}$, par $f(\theta) = \tan(\theta) + \theta$.
   (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Démontrer que f s'annule exactement 3 fois sur D en θ_0, θ_2 et θ_4 vérifiant $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$.
   (c) En déduire les points de Γ admettant une tangente horizontale.
   On admet qu'il existe uniquement 2 points $M(\theta_1)$ et $M(\theta_3)$ de Γ admettant une tangente verticale.
3. <u>Tracé de Γ.</u>
   On donne $\theta_1 \approx 0,86$ et $\cos(\theta_1) \approx 0,65$, $\theta_2 \approx 2,03$ et $\cos(\theta_2) \approx -0,44$,
   $\theta_3 \approx 3,43$ et $\cos(\theta_3) \approx -0,96$, $\theta_4 \approx 4,91$ et $\cos(\theta_4) \approx 0,20$.
   (a) En utilisant les données ci-dessus, proposer une construction du point $M(\theta_4)$ sachant que l'on dispose uniquement d'une règle graduée, d'un compas et d'une équerre.
   (b) Sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, placer avec précision les points $M(\theta)$ pour $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \dfrac{\pi}{2}$ avec leur tangente ainsi que les points $M(\theta)$ pour $\theta = \pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$ et 2π.
   Il est conseillé de prendre une unité de 2 cm.
   (c) Finir le tracé de Γ et placer le point $M\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$.
4. On note Δ la partie du plan délimitée par la courbe Γ et le segment $[M(0)M(2\pi)]$.
   L'objectif de cette question est d'en calculer l'aire $\mathcal{A}$.
   Pour tout $\theta \in [0;2\pi]$, on note $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ et $D(R)$ le disque de centre O et de rayon $R \geqslant 0$.
   Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, on note $t_k = \dfrac{2k\pi}{n}$.
   (a) Justifier que l'aire $\mathcal{A}_k(R)$ de la partie $D_k(R)$ de $D(R)$ comprise entre les deux demi-droites d'origine O et dirigées par les vecteurs $\vec{u}(t_k)$ et $\vec{u}(t_{k+1})$ vaut : $\dfrac{\pi}{n}R^2$.

(b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}_k$ de la partie Δ_k de Δ comprise entre les deux mêmes demi-droites vérifie : $\dfrac{4\pi^3}{n^3}k^2 \leqslant \mathcal{A}_k \leqslant \dfrac{4\pi^3}{n^3}(k+1)^2$.
On pourra remarquer que $D_k(R_1) \subset \Delta_k \subset D_k(R_2)$ pour deux valeurs de R_1 et R_2 bien choisies.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

(d) En déduire que $\dfrac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \dfrac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1)$ puis la valeur de $\mathcal{A}$.

5. L'objectif de cette question est d'utiliser la courbe Γ pour construire un segment ayant pour longueur le périmètre du cercle de centre O et passant par le point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(a) La tangente à Γ en $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ coupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la longueur du segment $[ON]$.

(b) Indiquer comment construire un point N_1 tel que le segment $[ON_1]$ réponde au problème.

6. L'objectif de cette question est d'utiliser la courbe Γ pour construire un angle dont la mesure est $\dfrac{\theta}{3}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$ est fixé, en utilisant uniquement une règle (non graduée) et un compas.
On admet que ces deux instruments permettent de tracer des droites et des cercles, de reporter des longueurs, de tracer une droite passant par un point fixé et parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

(a) Soit A et B deux points du plan. A l'aide du théorème de Thalès, indiquer une construction à la règle et au compas, d'un point C appartenant au segment $[AB]$ vérifiant $AC = \frac{1}{3}AB$.

(b) Utiliser cette construction (les parallèles et perpendiculaires pouvant ici être tracées avec une équerre) pour placer sur le dessin de la question 3, le point $M\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)$ et l'angle $\dfrac{4\pi}{9}$. On pourra commencer par construire le point P de la demi-droite d'origine O et passant par $M\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ tel que $\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

La courbe Γ de la partie III, est une spirale d'Archimède. Cette courbe est utilisée pour modéliser un rouleau de tissu ou comme profil de la came d'un organe mécanique (un engrenage ou un moteur par exemple).
Le résultat sur l'aire de Δ a été démontré par Archimède à l'aide de la méthode d'exhaustion (il ne possédait pas la notion de limite). Cette méthode lui a également permis de calculer le volume intérieur (d'une portion) de la surface de la partie II.
La courbe Γ a aussi permis à Archimède de résoudre deux des problèmes de l'antiquité : la quadrature du cercle et la trisection de l'angle, mais en utilisant en plus de la règle et du compas, un processus cinématique. Ce n'est qu'au XIX[e] siècle, que P. Wantzel et F. Von Lindemann ont démontré que ces deux problèmes étaient impossibles avec uniquement la règle et le compas.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1119 – D'après documents fournis