Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Problème d'Algèbre linéaire

Partie I

On considère les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?
2. Calculer A^2.
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Partie II

On se place dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni de la base orthonormée directe canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Pour un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, on note $f^2 = f \circ f$.

1. On note f la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{e}_3$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Décrire l'endomorphisme f^2.
   (b) Ecrire la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Les matrices C et C^2 sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
2. Soit $\vec{w}' = (1, 1, -4)$. On note g la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{w}'$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Déterminer un vecteur unitaire $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{w}'$ puis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée directe.
   (b) Ecrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ puis dans la base $\mathcal{B}$. On note $M_{\mathcal{B}}$ cette dernière matrice.
   (c) Les matrices $M_{\mathcal{B}}$ et $M_{\mathcal{B}}^2$ sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Partie III

On considère maintenant un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Pour un endomorphisme f de E, f^2 désigne toujours $f \circ f$. La notation Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

1. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.
2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, avec $p \in \mathbb{N}^\star$, ses valeurs propres.
   (a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E).$$
   (b) Montrer que, pour tout vecteur propre v de f, on a
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(v) = 0.$$

(c) Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. En décomposant x dans une base bien choisie, montrer que
$$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(x) = 0.$$

3. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que
$$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0 \quad (\star)$$
pour des réels α et β distincts.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $a(f - \alpha Id_E) + b(f - \beta Id_E) = Id_E$.
   (b) En déduire que $E = \operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) + \operatorname{Im}(f - \beta Id_E)$.
   (c) Déduire de $(\star)$ que $\operatorname{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E)$ et que $\operatorname{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E)$.
   (d) Montrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) + \ker(f - \beta Id_E)$.
   (e) Montrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E)$.
   (f) En déduire que f est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives. On note $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ ces valeurs propres.
   (a) Pour $1 \leq k \leq p$, on note F_k le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_k. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, F_k est stable par f.
   (b) Pour $1 \leq k \leq p$, on note f_k la restriction de f à F_k et on pose $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$. Montrer que $(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = 0$.
   (c) En déduire que f_k est diagonalisable.
   (d) Pour $1 \leq k \leq p$, on note $F_k^+ = \ker(f_k + \mu_k Id_{F_k})$ et $F_k^- = \ker(f_k - \mu_k Id_{F_k})$. Montrer que
$$E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \cdots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-.$$
   En déduire que f est diagonalisable.

Exercice de Probabilités

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. On note T_n le nombre de cases <u>non vides</u> à l'issue des n lancers.

1. Déterminer (en fonction de n et N) les valeurs prises par la variable T_n (on distinguera 2 cas : $n \leq N$ et $n > N$).
2. Donner la loi de T_1, de T_2. Calculer leurs espérances.
3. On se fixe maintenant $n \geq 2$. Calculer
$$\mathbb{P}(T_n = 1), \quad \mathbb{P}(T_n = 2), \quad \mathbb{P}(T_n = n).$$

4. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1). \quad (\star\star)$$

5. On note G_n la fonction génératrice de la variable T_n.
   (a) Rappeler la définition de G_n. Montrer qu'ici, la fonction G_n est définie sur tout $\mathbb{R}$.
   (b) Rappeler le lien entre G_n et $\mathbb{E}[T_n]$.
   (c) En utilisant l'équation $(\star\star)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).$$

   (d) En déduire que

   $$\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E[T_n] + 1$$

   puis que

   $$\mathbb{E}[T_n] = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

6. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i le numéro de la case dans laquelle la $i^{ième}$ boule tombe. Pour $1 \leq k \leq N$, on note Y_k le nombre de boules que contient la case numéro k, et Z_k la variable valant 0 si la boîte k est vide, et 1 si la boîte k contient au moins une boule.
   (a) Exprimer Y_k en fonction des variables $(X_i)_{1\leq i\leq n}$.
   (b) En déduire la loi de Y_k, puis celle de Z_k.
   (c) Les variables aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
   (d) Exprimer T_n en fonction des variables aléatoires $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$ et retrouver ainsi l'expression de $\mathbb{E}[T_n]$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1118 – D'après documents fournis