## MATHEMATIQUES I B

Durée : 4 heures

### PRESENTATION DU SUJET

L'objet de cette épreuve était la résolution de quelques problèmes d'optimisation avec ou sans contrainte. Elle était composée de sept parties. Les deux premières parties consistaient en des problèmes « pratiques », les parties 3, 4 et 5 permettaient d'obtenir des résultats plus abstraits qui servaient pour la résolution des parties 6 et 7. Les résultats ont été très inégaux et mis à part quelques excellentes copies, le niveau général est plutôt médiocre. On peut en effet regretter que beaucoup de candidats ne soient capables de faire que quelques calculs élémentaires et qu'aucun raisonnement abstrait, aussi simple soit il, ne puisse leur être demandé. Les mathématiques se restreignent alors à une vision purement « algorithmique » où l'on applique des recettes sans vraiment comprendre ce que l'on fait. La dernière partie de ce problème avec l'utilisation des notations de Monge à tort et à travers en est l'exemple le plus frappant.

### ANALYSE PAR PARTIE

**La première partie** consistait en la résolution d'un problème pratique d'optimisation à une variable. Cette partie a donné lieu à de bons résultats. Toutefois, nous aurions aimé une réelle preuve pour la résolution de la seconde question, là où beaucoup se sont contentés d'affirmer que la situation critique se situait au point de symétrie. Cela était effectivement le cas mais pas si évident que cela. De plus, la symétrie du problème n'était là que pour simplifier les calculs ultérieurs. Faut-il supprimer les cas simples pour avoir de réels raisonnements rigoureux ?

**Le seconde partie** consistait cette fois en un problème pratique d'optimisation à deux variables liées mais dont l'une des variables s'exprimait aisément en fonction de l'autre. Cette partie a été globalement bien traitée. Il faut cependant mettre en avant la nécessité de vérifier l'obtention d'un réel minimum, beaucoup se contentant d'obtenir un point critique sans aucune autre justification.

**La troisième partie** consistait en la démonstration du théorème du point fixe dans le cas d'une fonction contractante sur un intervalle réel. La suite des questions suggérait une démonstration à l'aide d'une suite récurrente (qui peut être généralisée à d'autres cas) bien qu'une démonstration directe soit ici possible. Il semble que nous ayons atteint ici le summum de l'abstraction pour beaucoup de candidats. En effet, la notion de continuité n'est assimilée que pour moins d'un tiers des candidats (nous ne parlons ici même pas de manipulation fine des epsilons). De même une suite convergente est bien souvent égale à sa limite à partir d'un certain rang, ce qui simplifie beaucoup les démonstrations. Il semble que, bien que capables d'étudier la convergence d'une suite ou d'une série donnée, beaucoup de candidats soient désarmés devant une question d'ordre générale sur un tel sujet.

**La quatrième partie** (la plus difficile il nous semble) consistait en la démonstration du théorème des fonctions implicites dans le cas d'une fonction de deux variables. Cette démonstration nécessitait des manipulations un peu délicates de la notion de continuité et, vus les piètres résultats de la partie précédente, il est clair que bien peu ont réussi à comprendre ce qui était demandé. Là encore soulignons le nombre incalculable de copies dans lesquelles la dérivée d'une fonction est égale à son taux de variation ! Il faut remarquer également qu'un certain nombre de candidats connaissent le théorème des fonctions implicites (bien que non au programme) mais aucun n'a reconnu que l'obtention de ce théorème était le but de cette partie.

**La cinquième partie** utilisait le théorème des fonctions implicites précédent afin d'obtenir une condition nécessaire permettant de chercher les points critiques dans le cas d'un problème d'optimisation avec contrainte. Cette partie ayant été très peu traitée, nous n'en parlerons pas plus.

**La sixième partie** était une application directe de la partie précédente. Il suffisait de lire et de comprendre quelque peu cette cinquième partie pour pouvoir résoudre le problème (et récolter des points non négligeables). Cela a donc été du tout ou rien pour les candidats qui ont soit totalement ignoré cette partie, soit l'ont traitée dans sa quasi intégralité. Là encore la plupart des candidats ont seulement montré l'existence d'un seul point critique. Néanmoins, la preuve de l'existence d'un minimum était très difficile ici.

**La dernière partie** consistant en l'obtention des maxima et minima locaux d'une fonction de deux variables continue sur un compact. Comme nous l'avons dit au début, nous avons pu constater une utilisation quasi anarchique de la hessienne pour l'obtention de ces extrema. Précisons que :

- Il faut tout d'abord chercher les points critiques avant de calculer la hessienne
- Cette méthode ne donne que des extrema locaux
- Elle n'est utilisable que sur un ouvert (c'est à dire ici à l'intérieur du domaine considéré)
- Dans le cas où elle est dégénérée, dire « on ne peut pas conclure » n'est pas une conclusion valable !

Il n'était pourtant pas difficile de dire qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes (question explicitement posée) et qu'une fonction positive qui s'annule en un point atteint son minimum global en ce point. Enfin beaucoup semblent ignorer que les extrema peuvent être atteint sur le bord du compact et qu'il faut faire une étude particulière pour ce bord. Bien souvent les candidats se lancent dans l'utilisation d'une recette calculatoire dans un réflexe Pavlovien alors que quelques instants de réflexion auraient suffit.